第二版 前 言

本书第一版问世之后，直到现在已有十余年了．在这一段时间里，泛函分析不但得到了更全面的发展，而且它的概念和方法也更强烈地渗透到数学和其它各个领域．泛函分析也已开始更广泛地应用于力学和工程，更不用说物理学了，它是第一个应用泛函分析的概念和方法进行理论研究的学科之一．因此没有必要再强调泛函分析的重要性以及它在数学领域里的地位．

随着泛函分析的发展，以及广大数学工作者、物理学家和工程技术人员对它的兴趣的日益增长，我们已经有了许多杰出的泛函分析教程和专著．这里只要指出 Л. В. Канторович 和 Г. П. Акилов[12]，А. Н. Колмогоров 和 С. В. Фомин [14]，В.И.Смирнов [29]，Б.З.Вулих [6]，Н. И. Ахиезер 和 И.М.Глазман[3]，F.Riesz 和 B.Sz.Nagy[27]，N.Dunford 和 J. T. Schwarz[10]以及其它一些书就够了．但是我们认为本书第二版并非重复了上列的教程和专著．第二版基本上保持了叙述的初等性，因而本书比其它书更适宜于初学者，与第一版相比较，第二版对内容重新做了一些调整，增补了一些占篇幅不大的问题，这些问题在一般内容中常常遗漏掉，或者只是解释性质的；还补充了相当多的新材料．最重要的增补是 С. Л. Соболев 空间及对这些空间的嵌入定理，在任一 Banach 空间内具有全连续算子的线性算子方程的 Riesz-Schauder 理论，J. Schauder 不动点原理，Hilbert 空间内无界自伴算子谱理论初步．和第一版一样，我们也不准备考虑泛函分析

的重要分支，例如线性拓扑空间、赋范环、群表现论、半序空间、广义函数及其应用等．我们只对有兴趣于这些问题的读者指出另外的专著．

在准备本书第二版的过程中，我们参考了许多泛函分析的教程和专著，首先是 Л. В. Канторовии 和 Г. П. Акилов, В. И. Смнрнов, F. Riesz 和 B.Sz.Nagy 的书．在讨论 Hilbert 空间内自伴算子谱理论时，我们基本上依照 А. И. Плеснер[24,25]的计划和想法． 当泛函分析在苏联开始得到广泛发展的年代，他曾经是线性算子谱分析和一般泛函分析的热情宣传者．

А. И. Перов, Д. А. Райков 和 Я. Б. Рутицкий 曾阅读本书原稿，并提出许多有价值的意见，作者对他们表示感谢．

作者

目　　录

引　　论

分析、几何与代数的基本概念的一般化

在本世纪初产生了一个新的分析学科，即泛函分析.

泛函分析的基本概念和方法，是在一些比较古老的数学分析领域内部逐渐形成的，这些领域是：变分法、微分方程论、函数逼近与表现论、分析中的数值计算法，特别是积分方程论.

泛函分析的实质在于把数学分析（及与之相近的代数与几何领域中）的初等部分的许多概念和方法推移到更一般的对象和属性更复杂的事物上面去，而且广泛地应用了代数与几何的方法. 与分析基本概念的推广有关的这种推移就可以用统一的观点来处理许多早期只在特殊学科里被孤立讨论过的问题，并把一些看起来似乎相隔较远的数学理论联系起来，从而更促进新的数学事实的发现. 为了证实这一说法的正确性，只须看近年来用泛函分析的方法所得出的有关微分方程、积分方程和其它方程的解的一系列的存在定理，或泛函分析对分析中近似计算法的研究就够了.

数学分析基本概念之所以可能一般化，是因为在它的各个不同分支的发展过程中，发现了在那里使用的概念、方法上有许多共同的地方，而且这些概念和方法常常在代数和几何中找出相似之点. 例如逐次逼近法可以用来求解各种各样的代数问题和分析问题. 又如泛函的定义，泛函的极值以及在

变分法中极值存在的条件则类似于函数(一个或多个变数)的定义，函数的极值以及微分学中极值存在的条件.

线性常微分方程和线性差分方程理论与线性代数方程组理论的相似，这是大家都知道的. 这些相似之点在发展史较晚的积分方程论中显得更突出.

随着分析概念在数学中的推广，也产生了由非欧几何的发现而开始的几何概念的推广. n 维空间几何的产生允许我们把多变数函数用几何的语言解释为多维空间的象，同时也显示了分析和几何之间的新的相似之处. 不仅如此，把分析几何化的新的可能性的出现更要求进一步推广几何概念. 我们不妨举几个例子来谈一谈，线性齐次 n 阶常微分方程的解的全体和 n 维矢量空间是同构的. 线性齐次偏微分方程的解的全体的几何类似物则是 n 维矢量空间的无穷维的推广. 在分析和几何的概念的对比和相似中有一个非常深刻而且非常重要的例子就是关于正交函数系的展开理论. 这些正交系在很多地方和欧氏空间正交矢量系相类似，而且正交系之所以得名也在于此. 把一个矢量用分量表示则对应于把函数用 Fourier 级数展开. Pythagoras 定理则相应于 Parseval-Стеклов 定理等，在此为了几何地表示无穷正交系，也需要把欧氏空间无穷维地扩张.

随着数学分析和几何的发展，不但分析的各部门的概念之间或分析和几何的概念之间的相似处增多了，而且也逐渐显示出来原来这些不同理论的相似乃是由于这些理论的基本概念极为相近之故. 函数相依，极限趋近，邻域，距离等就是这样的基础概念，而他们都是明显地或不明显地以各种形式应用于这些理论之中.

我们已经指出，泛函分析的特点不仅要把古典分析的基本概念和方法一般化，而且要把这些概念和方法几何化. 不

同类型的函数被看成《函数空间》的点或矢量．我们也曾说过，这样的讨论要求进一步把几何概念推广到：如，无穷维欧氏空间、矢量空间和另外的空间．这样一来，到最后引出了距离空间、线性赋范空间、拓扑空间等一般概念，它既包括了从前讨论过的几何对象也包括了不同的函数空间．

引进抽象空间以后，分析上的许多问题就可以用几何的语言来解释．象这样的用几何的方法去研究分析理论，不仅广泛地应用在数学文献里，而且也同样地应用于物理和力学的许多工作中．许多事实可以仿照 n 维几何推测出来，而另外许多事实也可以由几何方法获得证明．这样就在分析中找到了新的几何方法．同时随着几何概念的推广也产生了对代数概念的推广．

在一方面，施行于数的代数运算可以推移到属性更一般的对象上去(如矩阵、算子等)，同时，又在数学的不同部门引出并采用了群、环、域等概念． 随着代数概念在分析上的应用，开始了定义有极限运算的代数结构的研究．另一方面，更广泛地开始利用分析运算是代数运算的极限这样的事实．而且代数概念在泛函分析内的推广正如初等代数在一般古典分析中所起的作用．

因此线性代数和线性算子的理论相当．这个理论在本书中占相当大的一部分．分析的基本方法——用线性的对象去逼近非线性的对象——已运用到泛函分析中(见第八章)．由数值变量的多项式取极限后引出更一般的数值函数．与此相当《环上的多项式》(矩阵环、算子环等)的极限趋近得出这种变量的更一般函数．一些重要的数学领域如矩阵演算法，运算微积，线性算子谱论（见第七章）等都是在这个基础上建立起来的．

作为已经发展成为一个大的独立的数学分支的泛函分

析．直到现在仍继续吸收并继续总结更新的数学原理．为此只须指出在近年来得到充分发展的线性拓扑空间理论、群表现论和泛函分析的某些近代分支．

第一章 距离空间

§1 函数、空间、序性

数学分析的基本概念之一是函数相依．我们回忆一下在分析中函数相依的定义：设X和Y是两个实数集．如果对每一数 $x\in X$，按某一法则(规律)有唯一数 $y\in Y$ 与之对应，我们就说在集X上定义了一个单值函数 $y=\phi(x)$，其值域含于集Y内．集X也称为函数的定义域．

不难看出，在函数相依的概念中没有必要把X和Y都限制为实数集． 如果把X和Y理解为具有另外属性的元的集时，那么我们就导致更一般的函数相依的概念．这样的例子在数学分析的各个分支里都找得到．

例 1．设 $y=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为n个实变量的实函数．那么X是n个有序实数组的某一集，Y是实数集．

2．设 $\boldsymbol{y}=f(x)$ 是一矢量值函数，使n维矢量$\boldsymbol{y}$与实数x对应．在此X为某一实数集，Y为n维矢量的集．

3．在变分学中我们常考虑如下形式的泛函

$$I(\gamma)=\int_a^b F(x, y, y')dx,$$

其中γ是由方程 $y=f(x)$ 给定的曲线，式中的$f(x)$是过两个已知点 $A(a, y_a)$ 和 $B(b, y_b)$ 且具有连续导数，即所谓C_1的函数． 在这个情形下，X是具有上述性质的曲线的集，Y是实数集．

4．在积分方程论中，常考虑形式如

$$y(t)=\int_a^b K(t,s)x(s)ds$$

的积分式.在此,我们假设核 $K(t,s)$ 在正方形 $a\leqslant t,s\leqslant b$ 上被定义且连续. 那么上述等式可以看做某一规律, 据此使在$[a,b]$上的每一连续函数 $x(t)$ 有同一区间上的另一连续函数 $y(t)$ 与之对应. 这时X和Y都是连续函数的集.

现在我们引入函数相依的一般定义.

设任给两个集X和Y, 并给定一个规律使得对每一元 $x\in X$ 都有一个唯一确定的元 $y\in Y$ 与之对应, 我们就说在集X上定义了一个算子 $y=f(x)$(也常记成 $y=fx$)其值域含于集Y[1].我们也说在集X上定义了一个到集Y内的映象.特别,当算子的值为实数或复数时,我们就把这样的算子称为泛函.

对于映象 $y=f(x)$, 与 $x\in X$ 成对应的元 $y\in Y$ 称为元x的象, 而x则称为 $y\in Y$ 的原象.

如果映象 $y=f(x)$ 映X于Y上,那么显然对每一 $y\in Y$ 至少有一个原象x. 在此情形下, 如果每一元 $y\in Y$ 仅有一个原象 $x\in X$,那么我们就说由公式 $y=f(x)$ 给定的X到Y上的映象是一对一的.

像这样非常一般地定义的算子, 我们几乎说不出它具有什么性质. 因此常常还要引入一些补充的假设.

在分析中与函数相依这一概念同等重要的一基本概念就是极限的概念以及随之而来的连续性的概念. 凡可依某种方式来定义序列的极限概念的集称为空间. 元为函数或数列的空间称为函数空间. 研究在函数空间内定义的算子构成泛函分析的基本内容.

---

1) 我们作这样规定: 假如某一情况对集的所有元成立, 我们就说"在集上"成立. 假如某一情况成立,但可能不是对集的所有元成立, 我们就说"在集内"成立.

我们再略论一下在泛函分析中用到的某些概念.

设由元 $a, b, c, \cdots$ 组成的集 X 的某些元的有序对可以引入关系

$$a \leqslant b,$$

并设这个关系满足下述条件:

1) $a \leqslant a$,

2) 若 $a \leqslant b$ 且 $b \leqslant c$,那么 $a \leqslant c$,

3) 若 $a \leqslant b$ 且 $b \leqslant a$,那么 $a = b$.

我们就称 X 为一个半序集. 如果对元 a 和 b 总有 $a \leqslant b$ 或 $b \leqslant a$,那么 a 和 b 称为可比较的.

集 X 称为全序的(或线性序的),如果对 X 的任意两个元 a 和 b 总有 $a \leqslant b$ 或 $b \leqslant a$.

半序集 X 的子集 Y 称为上有界的,如果存在元 $b \in X$, $y \leqslant b$ 使得对所有的 $y \in Y$. b 称为集 Y 的一个上界. 上界中的最小者称为 Y 的上确界.

同理可以定义下有界,集的下界及下确界.

最后,元 $z_0 \in X$ 称为 X 的极大元,如果在 X 内不存在元 $x \neq z_0$ 满足 $z_0 \leqslant x$.

有了以上定义后,下述引理是非常重要的.

Zorn 引理 如果半序集 X 的每一全序子集 Y 都有上界,那么在 X 内存在极大元.

全序集称为良序的,如果它的任一非空子集 Y 都含有最小元,即是说,存在 $a \in Y$,使得对所有的 $x \in Y$, $a \leqslant x$.

Zermelo 定理 每一集 X 总可以引入某一顺序关系,使之成为良序集.

Zermelo 定理可由所谓的 Zermelo 选择公理来证明.这个公理是说:任意给定一个非空的互不相交的集族,必存在一个集,使得它与集族中每一个集有且仅有一个公共元.

可以证明，Zorn 引理、Zermelo 定理和选择公理是相互等价的命题.

详见[5]和[21]*).

例. 令$\mathscr{M}$代表某一非空集，且令 $T=\{t\}$ 代表M的所有子集 t. 如果 $t_1\subset t_2$,则规定 $t_1\leqslant t_2$. 显然,这样引入的顺序关系满足半序集的三个条件. 如果M含有两个或两个以上的元时,集T的这样顺序化显然不是全序的(自然，更不是良序的).

如果S是T的任一子集,那么它是上有界的,而且它的上确界是集

$$S=\bigcup_{t\in S}t.$$

在T内存在极大元：即M自身，因为M自身也可以看做一个子集. Zorn 引理在这个情形下是显然成立的. Zermelo 定理断定，如果引入另外顺序关系的话，T可以使之良序化. 但是怎样引入这个关系不能由定理导出，这是因为这个定理的证明是非构性的.

§2 距离空间

在数学分析中我们遇到过一些极限的概念，而且在某些情况下对于同一数学对象的序列常由问题性质的不同而引入不同的极限概念. 我们首先遇到的是实数序列的极限概念. 这个概念立刻可以推广到复数序列和 n 维矢量序列. 其次，对函数序列我们有一系列的收敛概念：按点收敛、一致收敛、平均收敛等等.

所有这些收敛概念都具有一个共性,一个序列的元 x_n(代表数、矢量或函数)收敛于元 x，它的意思是说 x_n 无限地“接

*) 也可以参考补充文献[36]. ——译者注

近"于 x，也就是说，当这些下标无限地增大时，这些元之间的"距离"就无限制地缩小．依随于元 x_n 和 x 之间的距离的不同理解，我们就得出不同的极限定义．因此对某些集的元之间给出距离的一个一般定义而使之能保持上面所说的特例是适合的．此后，再借助这个距离在集内引入极限概念，使它转变成为一个空间．

距离空间 集 X 称为一个距离空间，如果对它的每一对元 x 和 y，有非负实数 $\rho_X(x, y)$ 与之对应，且满足下述条件：

1) $\rho_X(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$（恒等公理）．

2) $\rho_X(x, y)=\rho_X(y, x)$（对称公理）．

3) $\rho_X(x, y)+\rho_X(y, z)\geqslant\rho_X(x, z)$（三角公理）．

非负数 $\rho_X(x, y)$ 称为元 x 和 y 的距离．上面列举的三个条件称为距离公理．显然，距离公理所表述的乃是普通三维欧氏空间的点之间的距离的最一般性质．

以后，如果我们知道所说的是指那一个距离空间 X 的话，那么，我们将简单地用记号 $\rho(x, y)$ 代替 $\rho_X(x, y)$．距离空间的元也称为点．

最后，还应当提一下，如果对 X 的每一子集 Y，以 X 的距离来定义 Y 内的点的距离的话，那么 Y 也是一个距离空间并称它为 X 的子空间．

序列的极限 距离空间 X 的元 x 称为 X 中元的序列 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 的极限，如果 $n\to\infty$ 时，$\rho(x_n, x)\to 0$．

在这个情形下，我们记成

$$x_n\to x,$$

或

$$\lim_n x_n = x.$$

关于距离空间的收敛点列有下述几个一般定理．

定理 1 如果距离空间X的点列$\{x_n\}$收敛于点$x\in X$，那么$\{x_n\}$的任一子序列$\{x_{n_k}\}$也收敛于同一点.

证明是显然的.

定理 2 距离空间X的点列$\{x_n\}$不可能收敛于一个以上的极限.

设 $x_n\to x$ 且 $x_n\to y$. 那么任给 $\varepsilon>0$,

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x_n,x)+\rho(x_n,y)<\varepsilon,$$

对充分大的n. 因为x和y是固定的，而ε是任意正数，所以上述不等式仅当 $\rho(x,y)=0$，即 $x=y$ 时才成立.

定理 3 如果X的点列$\{x_n\}$收敛于x，那么数列$\rho(x_n,\theta)$对空间X的任一固定元θ有界.

事实上，由三角公理，对任意n有

$$\rho(x_n,\theta)\leqslant\rho(x_n,x)+\rho(x,\theta)\leqslant L+\rho(x,\theta)=K,$$

这是因为$\{\rho(x_n,x)\}$作为收敛数列是有界的，所以数$\rho(x_n,x)$不超过某一常数L.

空间X中满足 $\rho(x,a)<r(\rho(x,a)\leqslant r)$ 的点x的全体称为以a为中心r为半径的球(闭球). 我们用$S(a,r)(\bar{S}(a,r))$代表这样的球(闭球). 此外，所谓点x的邻域是指任一个以这点为中心的球.

不难看出，点x是序列$\{x_n\}$的极限当且仅当x的任一邻域含有从某一下标开始的所有点. 完全含于某一个球的集称为有界的.

有时，如果在某一个空间中已直接给定了元列的极限的概念. 假如在这个空间中可以引入这样的距离使得由它定义的序列极限的概念和原有的极限概念一致，那么我们说空间X可以距离化.

闭包 在距离空间中可以引入许多非常重要的概念，而且是在直线上的点集理论中遇到过的. 例如给定集 $M\subset X$.

我们称点 $a\in X$ 为这个集的聚点，如果点 a 的任一邻域至少含有集 $M\backslash a$ 的一个点，换句话说，如果

$$S(a,\ r)\cap(M\backslash a)\neq\varnothing$$

对任意 r. 自然，和以往一样，我们用 $\varnothing$ 代表空集. 添加 M 的所有聚点于 M 后所得的集称为 M 的闭包，用 $\bar{M}$ 代表.

不难验证，距离空间点集的闭包和直线上点集的闭包具有相同的基本性质. 即是说：

1) $\overline{M\cup N}=\bar{M}\cup\bar{N}$,

2) $M\subseteq\bar{M}$,

3) $(\bar{\bar{M}})=\bar{\bar{M}}=\bar{M}$,

4) 空集的闭包是空集.

集 M 称为闭的，假如 $\bar{M}=M$. 集 M 称为开的，假如它的余集 $X\backslash M$ 是闭的. 集 M 称为在集 G 内是稠密的，假如 $G\subseteq\bar{M}$. 特别，集 M 称为在空间 X 到处稠密的，假如 $\bar{M}=X$. 最后，集 M 称为在 X 到处不稠的，如果这个空间的每一个球总含有某一个球而不含 M 的点. 关于距离空间的闭集和开集的详细研究可参考[1].

连续函数 设给定两个距离空间 X 和 Y. 又给定一定义在 X 的某一集 M 且在 Y 内取值的函数 $y=f(x)$. 函数 f 称为在点 $x_0\in M$ 是连续的，如果任给 $\varepsilon>0$ 存在 $\delta>0$，使得 $\rho_Y(f(x),f(x_0))<\varepsilon$ 对满足不等式 $\rho_X(x,x_0)<\delta$ 的每一 $x\in M$ 成立.

由 $f(x)$ 的连续性定义可知，如果

$$x_n\to x_0\quad(x_n,x_0\in M),$$

那么

$$f(x_n)\to f(x_0).$$

反之，它的逆定理也成立，就是说，如果

$$f(x_n)\to f(x_0)$$

对任一收敛于 $x_0\in M$ 的序列 $\{x_n\}\subseteq M$，那么函数 $f(x)$ 在点

x_0 连续．这些论断的证明完全同实变量的实函数的情形．

同胚 设X和Y是给定的距离空间，且存在一个X到Y上的一对一映象．如果这个映象及其逆映象均连续，我们就说空间X和Y同胚．

§3 距离空间的例

数直线 设 $X=R$，R代表所有实数的集(数直线)．若$x,y\in R$，令

$$\rho(x,y)=|x-y|.$$

距离公理的成立是显然的．这个空间内的收敛是普通数列的收敛．

欧氏空间 设X是n组算数空间，即所有n个实数的有序组的全体．若

$$x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\},\quad y=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n\},$$

令

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\eta_i)^2}.$$

这样定义的 $\rho(x,y)$ 显然满足距离公理．设

$$x_k=\{\xi_1^{(k)},\xi_2^{(k)},\cdots,\xi_n^{(k)}\},\ k=1,2,3,\cdots$$

且当 $k\to\infty$ 时 $\rho(x_k,x)\to 0$ $\left(\text{即 } \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i^{(k)}-\xi_i)^2}\to 0\right)$.

这个收敛等价于 $k\to\infty$ 时 $\xi_i^{(k)}\to\xi_i$，$i=1,2,\cdots,n$．

因此这个空间的收敛是按坐标收敛．具有这个距离的空间X称为n维欧氏空间，用E_n代表．

具有 Чебышев 距离的连续函数空间．

设X是定义在闭区间$[0, 1]$上的所有连续函数的集[1]. 引入距离,令

$$\rho(x,y) = \max_t |x(t) - y(t)|.$$

我们来验证它满足距离公理.

首先,$\rho(x,y) \geqslant 0$ 且 $\rho(x,y) = 0$ 仅当 $x(t) \equiv y(t)$ 以及 $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ 都是显然的.剩下的是验证三角公理.

对任意 $t \in [0,1]$ 我们有

$$\begin{aligned} |x(t) - z(t)| &= |[x(t) - y(t)] + [y(t) - z(t)]| \\ &\leqslant |x(t) - y(t)| + |y(t) - z(t)| \\ &\leqslant \max_t |x(t) - y(t)| + \max_t |y(t) - z(t)| \\ &= \rho(x,y) + \rho(y,z). \end{aligned}$$

因此 $\rho(x,z) = \max_t |x(t) - z(t)| \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z)$.

具有上述距离的$[0,1]$上的所有连续函数的集合称为**连续函数空间**并用 $C[0,1]$ 代表. 我们也把这个空间称为具有 Чебышев 距离的连续函数空间,因为函数间的这个距离和 Чебышев 偏离是相同的.

我们来讨论空间 $C[0, 1]$ 内的收敛. 设给定了 $C[0, 1]$ 的元列$\{x_n(t)\}$并设它收敛于 $x(t)$($\rho(x_n,x) \to 0$ 当 $n \to \infty$). 这就是说

$$\max_t |x_n(t) - x(t)| \to 0 \quad 当\ n \to \infty.$$

即任给 $\varepsilon > 0$,存在 $n_0 = n_0(\varepsilon)$ 使得

$$\max_t |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon$$

对所有 $n \geqslant n_0(\varepsilon)$ 和所有 $t \in [0, 1]$. 换言之,序列$\{x_n(t)\}$一致收敛于函数 $x(t)$.

---

1) 如果变量 t 的变化范围是$[a,b]$,那么用变换式 $\tau = \frac{t-a}{b-a}$ 引入新变量 τ,则 τ 的变化范围是$[0,1]$.

反之，如果在 $[0,1]$ 上 $\{x_n(t)\}$ 一致收敛于 $x(t)$，那么 $\rho(x_n,x)\to 0$。

因此空间 $C[0,1]$ 的收敛是$[0,1]$上的一致收敛。

有界数列空间 令X代表所有有界数列

$$x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}.$$

这就是说，对每一x存在一个常数 K_x 使得 $|\xi_i|\leqslant K_x$ 对所有的 i。

设 $x=\{\xi_i\}$，且 $y=\{\eta_i\}$ 属于 X. 由等式

$$\rho(x,y)=\sup_i|\xi_i-\eta_i|$$

引入距离.

显然，只须验证三角公理，我们有

$$\begin{aligned}|\xi_i-\zeta_i|&\leqslant|\xi_i-\eta_i|+|\eta_i-\zeta_i|\\&\leqslant\sup_i|\xi_i-\eta_i|+\sup_i|\eta_i-\zeta_i|\\&=\rho(x,y)+\rho(y,z),\end{aligned}$$

其中 $z=\{\zeta_i\}$. 由此

$$\sup_i|\xi_i-\zeta_i|=\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z).$$

这样得出的空间称为*有界数列空间*，记作 m.

设 x_n 和 x 为m的元，$x_n=\{\xi_i^{(n)}\}$，$x=\{\xi_i\}$ 且$\rho(x_n,x)\to 0$ 对 $n\to\infty$. 这就是说，任给 $\varepsilon>0$，存在 $n_0=n_0(\varepsilon)$ 使得对 $n\geqslant n_0(\varepsilon)$

$$\rho(x_n,x)=\sup_i|\xi_i^{(n)}-\xi_i|<\varepsilon.$$

由此对 $n\geqslant n_0(\varepsilon)$ 和所有 i，

$$|\xi_i^{(n)}-\xi_i|<\varepsilon.$$

反之，如果$|\xi_i^{(n)}-\xi_i|<\varepsilon$ 对 $n\geqslant n_0(\varepsilon)$ 和所有 i，那么 $\rho(x_n,x)\to 0$ 对 $n\to\infty$. 结果，空间m的收敛是*按坐标收敛，且关于坐标的下标是一致的*.

收敛数列空间 设X代表所有收敛数列

$$x = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots\},$$

且设
$$\lim_i \xi_i = \xi.$$

令
$$x = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots\},$$
$$y = \{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n, \cdots\}.$$

且令
$$\rho(x,y) = \sup_i |\xi_i - \eta_i|.$$

这样得出的空间称为空间 c. 显然,收敛数列空间 c 是有界数列空间 m 的子空间.

由此可知，在空间 c 内的距离满足距离公理且 c 的收敛是按坐标收敛,关于坐标的下标是一致的.

有界实函数空间 考虑给定在 [0, 1] 上所有有界函数 $x(t)$ 的集. 用

$$\rho(x,y) = \sup_t |x(t) - y(t)|$$

引入距离. 不难验证它满足距离公理. 我们把具有这样的距离的所有[0,1]上的有界函数所成的空间记作 $M[0,1]$. 显然,空间 $M[0,1]$ 的收敛是[0,1]上的一致收敛. 又 $C[0,1] \subset M[0,1]$ 也是明显的.

本质有界可测函数空间 在讨论这个空间之前，我们引入一个概念

设 $\alpha(t)$ 是[0, 1]上一个可测函数. 用 $\mathscr{E}$ 代表[0, 1]内测度为零的所有集 E 所成的集族. 在 $\mathscr{E}$ 上讨论集函数:

$$\sup_{[0,1]\setminus E} |\alpha(t)| = \mu(E).$$

我们证明,如果这个函数对某一 $E \in \mathscr{E}$ 其值有限,那么它在某一集 E_α 上取得极小值. 为此令

$$\mu_0 = \inf_{E \in \mathscr{E}} \mu_0(E).$$

依下确界定义,可以找到这样一个序列 $\{E_n\} \subset \mathscr{E}$ 使

$$\mu_0 \leqslant \sup_{[0,1]\setminus E_n} |\alpha(t)| < \mu_0 + \frac{1}{n}.$$

令 $E_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$，那么 $mE_\alpha = 0$，其中 m 代表直线上 Lebesgue 测度. 由此

$$\mu_0 \leqslant \sup_{[0,1]\setminus E_\alpha} |\alpha(t)| \leqslant \sup_{[0,1]\setminus E_n} |\alpha(t)| < \mu_0 + \frac{1}{n}.$$

既然这个不等式对所有 n 成立，所以 $\mu_0 = \mu(E_\alpha)$. 我们称数 μ_0 为函数 $\alpha(t)$ 在 $[0,1]$ 上的**本质极大**或**本质上确界**并记作

$$\operatorname{vrai}\max_{[0,1]} |\alpha(t)| = \min_{E\in\mathscr{E}} \{\sup_{[0,1]\setminus E} |\alpha(t)|\}^{*)}.$$

令 X 代表本质极大有限的 $[0, 1]$ 上的所有可测函数 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $\cdots$ 的集. X 上两个函数 $x(t)$ 和 $y(t)$ 看做恒等的，如果它们殆遍相等的话.

对 $x(t)$, $y(t) \in X$，令

$$\rho(x,y) = \operatorname{vrai}\max_{[0,1]} |x(t) - y(t)|.$$

我们来验证它满足距离公理

1) 因为

$$\sup_{[0,1]\setminus E} |x(t) - y(t)| \geqslant 0,$$

所以 $\rho(x,y) \geqslant 0$，而且显然当 $x(t) = y(t)$ 殆遍成立时 $\rho(x,y) = 0$. 反之，设 $\rho(x,y) = 0$. 那么对某一零测集 E_{xy} 有

$$\sup_{[0,1]\setminus E_{xy}} |x(t) - y(t)| = 0,$$

即在 E_{xy} 之外 $x(t) = y(t)$，从而 $x(t)$ 和 $y(t)$ 殆遍相等.

2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ 显然.

3) 设 $x(t)$, $y(t)$ 和 $z(t)$ 为 X 的元，且 E_{xz}, E_{yz} 为零测集使得

---

*) $\operatorname{vrai}\max_{[0,1]} |\partial(t)|$ 也常记成 $\operatorname{ess}\sup_{[0,1]} |\alpha(t)|$. ——译者注

$$\rho(x,z)=\sup_{[0,1]\setminus E_{xz}}|x(t)-z(t)|,$$
$$\rho(y,z)=\sup_{[0,1]\setminus E_{yz}}|y(t)-z(t)|.$$

令 $E_{xy}=E_{xz}\cup E_{yz}$，我们有

$$\begin{aligned}&\sup_{[0,1]\setminus E_{xy}}|x(t)-y(t)|\\ \leqslant&\sup_{[0,1]\setminus E_{xy}}|x(t)-z(t)|+\sup_{[0,1]\setminus E_{xy}}|z(t)-y(t)|\\ \leqslant&\sup_{[0,1]\setminus E_{xz}}|x(t)-z(t)|+\sup_{[0,1]\setminus E_{yz}}|z(t)-y(t)|\\ =&\rho(x,y)+\rho(y,z).\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\rho(x,y)&=\operatorname{vrai}\max_{[0,1]}|x(t)-y(t)|\\ &\leqslant\rho(x,z)+\rho(y,z).\end{aligned}$$

这就是我们要证的三角不等式.

这样得到的空间记作 $\widetilde{M}[0,1]$*).

最后，再说明这个空间内的收敛意义，设 $x_n(t)$，$x(t)\in\widetilde{M}[0,1]$，且 $\rho(x_n,x)\to0$ 当 $n\to\infty$. 这就是说，对给定的 $\varepsilon_K>0$，

$$\rho(x_n,x)=\min_{E}\{\sup_{[0,1]\setminus E}|x_n(t)-x(t)|\}<\varepsilon_K$$

对 $n\geqslant n_0(\varepsilon_K)$. 于是存在零测集 E_k 使

$$\sup_{[0,1]\setminus E_k}|x_n(t)-x(t)|<\varepsilon_K\quad 对\quad n\geqslant n_0(\varepsilon_K).$$

因此 $|x_n(t)-x(t)|<\varepsilon_K$ 对 $n\geqslant n_0(\varepsilon_K)$ 和任意 $t\in[0,1]\setminus E_K$.

取序列

$$\{\varepsilon_m\}，使\ \varepsilon_m\to0\ 当\ m\to\infty,$$

和对应的集 E_m，令 $\varepsilon>0$ 任意. 我们有

---

*) 这个空间一般都记成 $L_\infty[0,1]$，而有界数列空间 m 也记成 l_∞. ——译注

$$|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon_K < \varepsilon$$

对 $n \geqslant n_0(\varepsilon_K)$ 和所有 $t \in [0,1] \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$. 由此可知在[0,1]上殆遍有 $x_n(t) \to x(t)$,而且在所述的集上是一致的.

反之,设$\{x_n(t)\}$殆遍一致收敛于 $x(t)$*). 那么,任给 $\varepsilon > 0$,存在下标 $n_0(\varepsilon)$ 和零测集 E_ε,使得 $|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon$ 对 $n \geqslant n_0(\varepsilon)$ 和所有 $t \in [0,1] \setminus E_\varepsilon$.

由此

$$\sup_{t \in [0,1] \setminus E_\varepsilon} |x_n(t) - x(t)| \leqslant \varepsilon$$

对 $n \geqslant n_0(\varepsilon)$,随之

$$\min_E \{ \sup_{t \in [0,1] \setminus E} |x_n(t) - x(t)| \} \leqslant \varepsilon,$$

对 $n \geqslant n_0(\varepsilon)$. 故 $\rho(x_n, x) \to 0$ 对 $n \to \infty$. 换句话说,在空间 $\widetilde{M}[0,1]$ 内的收敛是殆遍一致收敛.

所有数列空间 我们举一个可距离化的空间. 设X是所有实数列的集. 在此集内我们引入收敛的概念. 设 $x_n = \{\xi_i^{(n)}\}$趋近于 $x = \{\xi_i\}$ 如果 $\xi_i^{(n)} \to \xi_i$ 对所有 $i = 1, 2, 3, \cdots$ (一般关于 i 不是一致的). 这样我们得出一个非距离空间,称它为空间 S.

现在指出,空间 S 可以距离化.

设 $x = \{\xi_i\} \in S$, $y = \{\eta_i\} \in S$, 令

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i - \eta_i|}{1 + |\xi_i - \eta_i|}.$$

恒等公理和对称公理是显然的.

三角公理则可由不等式

---

*) 注意,这个概念不要和由 Егоров 定理所提供的殆一致收敛相混. ——译者注

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$

得出．现在证明这个不等式如下．

设 a 和 b 同符号，可设 $a>0$，$b>0$，于是

$$\begin{aligned}\frac{|a+b|}{1+|a+b|} &= \frac{a+b}{1+a+b} \\ &= \frac{a}{1+a+b} + \frac{b}{1+a+b} \\ &< \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}.\end{aligned}$$

今设 a 和 b 异号．不妨设 $|a| \geqslant |b|$．由此

$$|a+b| \leqslant |a|.$$

考虑函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$．我们有

$$f'(x)=\frac{1}{(1+x)^2}>0,$$

所以 $f(x)$ 为增函数．这就是说

$$\begin{aligned}\frac{|a+b|}{1+|a+b|} &\leqslant \frac{|a|}{1+|a|} \\ &\leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.\end{aligned}$$

再回到三角公理有

$$\begin{aligned}\rho(x,z) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i-\zeta_i|}{1+|\xi_i-\zeta_i|} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i-\eta_i+\eta_i-\zeta_i|}{1+|\xi_i-\eta_i+\eta_i-\zeta_i|} \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\eta_i|}\end{aligned}$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|\eta_i-\zeta_i|}{1+|\eta_i-\zeta_i|}$$

$$=\rho(x,y)+\rho(y,z).$$

现在证明，在引入的距离意义下的收敛就是原来的按坐标的收敛（一般关于坐标的下标不是一致的）. 事实上，设 $x_n=\{\xi_i^{(n)}\}$，$x=\{\xi_i\}$，且 $x_n\to x$. 这就是说

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}{1+|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}<\varepsilon$$

对 $n\geqslant n_0(\varepsilon)$. 由此对每一固定 i 更有

$$\frac{1}{2^i}\cdot\frac{|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}{1+|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}<\varepsilon$$

对 $n\geqslant n_0(\varepsilon)$. 既然 ε 任意且 i 固定，所以

$$|\xi_i^{(n)}-\xi_i|\to 0\quad n\to\infty.$$

反之，设 $$|\xi_i^{(n)}-\xi_i|\to 0\quad n\to\infty$$

对每一 i. 任给 $\varepsilon>0$，取 m 使

$$\sum_{i=m+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是

$$\rho(x_n,x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}{1+|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{2^i}\frac{|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}{1+|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}$$

$$+\sum_{i=m+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}{1+|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}$$

$$<\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{2^i}\frac{|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}{1+|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

由于余和的项有限而且固定，所以可选 $n_0(\varepsilon)$ 使

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i^{(n)} - \xi_i|}{1 + |\xi_i^{(n)} - \xi_i|} < \frac{\varepsilon}{2}$$

对 $n \geqslant n_0(\varepsilon)$. 结果,对 $n \geqslant n_0(\varepsilon)$ 有

$$\rho(x_n, x) < \varepsilon.$$

由上述证明可知在引入的距离意义下的收敛与原来空间 S 的收敛重合. 因此引入这样的距离后可使空间 S 距离化.

依测度收敛空间 设 X 是定义在 [0, 1] 上的可测函数 $x(t)$ 的全体,殆遍相等的两个函数看做是恒等的.

由等式

$$\rho(x, y) = \int_0^1 \frac{|x(t) - y(t)|}{1 + |x(t) - y(t)|} dt$$

在空间引入距离. 同于前例可知距离公理得到满足.

我们称这个空间为空间 $S[0,1]$. 可以证明 $S[0,1]$ 内的收敛是依测度收敛,依测度收敛的定义可看[21]或[36].

***p*-幂可积函数空间** 设 X 是属于 $L_p[0,1]$[1]的所有函数 $x(t)$ 的集, 其中 $p \geqslant 1$. 两个仅在一个零测度取不同值的函数看做是恒等的. 若 $x(t) \in L_p[0,1]$, $y(t) \in L_p[0,1]$, 令

$$\rho(x, y) = \left(\int_0^1 |x(t) - y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

那么恒等公理及对称公理容易验证. 至于三角公理则由 Minkowski 不等式得出*). 这样得出的空间称为空间 $L_p[0,1]$**). 空间 $L_2[0,1]$ 称 Hilbert 函数空间.

设 $x_n(t) \in L_p[0,1]$, $n = 1, 2, \cdots$ 且 $\{x_n(t)\}$ 收敛于

---

1) 见附录 I.

*) 在 $L_p[0,1]$ 的定义中要求幂指数 $p \geqslant 1$,因为 $0<p<1$ 时 $\rho(x,y)$ 不满足三角公理. ——译者注

**) 易证凡属于 $L_\infty[0,1]$ 的函数均属于 $L_p[0,1]$ 对每一 $p \geqslant 1$. 而且在 $L_\infty[0,1]$ 的距离为 $L_p[0,1]$ 内的距离当 $p \to \infty$ 时的极限. 对本质有界可测函数空间采用记号 $L_\infty[0,1]$ 意义在此. ——译者注

$x(t)\in L_p[0,1]$ 即是说

$$\int_0^1 |x_n(t)-x(t)|^p dt \to 0$$

对 $n\to\infty$. 这时我们说函数列 $\{x_n(t)\}$ p 次幂平均收敛于 $x(t)$. 当 $p=2$ 时只简单地说平均收敛.

数列空间 $l_p(p\geq 1)$. 令 X 代表属于 l_p[1] 的所有实数列 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}$. 若 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}$ 和 $y=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots\}\in l_p$, 我们依公式

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i-\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

定义距离. 证明它满足距离公理是不难的. 三角公理由关于和的 Minkowski 不等式得出.

这样得到的空间称空间 l_p. 空间 l_2 称坐标 Hilbert 空间.

可以证明[2], 空间 l_p 的序列 $x_n=\{\xi_i^{(n)}\}$ 收敛于 $x=\{\xi_i\}$ 是说

1) $n\to\infty$ 时 $\xi_i^{(n)}\to\xi_i$ 对所有 n.

2) 任给 $\varepsilon>0$,存在 $N_0(\varepsilon)$ 使得 $\sum\limits_{i=N+1}^{\infty}|\xi_i^{(n)}|^p<\varepsilon^p$ 对所有 $N\geq N_0(\varepsilon)$ 和所有 n.

空间 $l_p^{(n)}$ 设 X 是算数 n 维空间,即所有序 n 实数组. 设 $x=\{\xi_1,\xi_2\cdots,\xi_n\}$, $y=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n\}$,
令

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

---

1) 见附录 I .
2) 见以下关于空间 l_p 的紧性判别法.

这样得出的空间称空间 $l_p^{(n)}$. 在以后讲的空间的等距性的意义下，可以认为 $l_p^{(n)} \subset l_p$，如果我们把 $\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\} \in l_p^{(n)}$ 看做和元 $\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, 0, 0, \cdots\} \in l_p$ 恒等的话. 由此立刻知道上述距离满足距离公理. 空间 $l_p^{(n)}$ 的收敛是按坐标收敛.

复空间. 随着空间 $C[0,1]$, $L_p[0,1]$, c, l_p, 我们可以考虑依次包含的复空间 $C[0,1]$, $L_p[0,1]$, c, l_p. 空间 $C[0,1]$ 的元是实变量的复值连续函数. $L_p[0,1]$ 是指其模的 p 次幂可积分的复值可测函数的全体. $c(l_p)$ 是指收敛(模的 p 次幂的级数为收敛)的复数数列的全体.

以上对实空间给出的所有定义可以照搬到复空间上去.

非距离化空间 最后，我们再举一个集的例子，在其内可以引入序列收敛的概念，但不能引入距离定义相同的收敛.

考虑定义在$[0,1]$上所有实函数的集合 $F[0,1]$，我们规定序列 $\{x_n(t)\} \subset F[0,1]$ 称为收敛于 $x(t) \in F[0,1]$，如果对任一固定 t，

$$x_n(t) \to x(t).$$

因此 $F[0,1]$ 内的函数列的收敛是按点收敛. 这个收敛是不能距离化的. 事实上，如果在 $F[0,1]$ 内可以引入距离使得按这个距离的收敛是序列的按点收敛的话，那么设M是这样得到的距离空间 $F[0,1]$ 内的所有连续函数的集时，则一方面由距离空间内闭包的性质 $\bar{\bar{M}} = \bar{M}$，而在另一方面又有 $\bar{\bar{M}} \neq \bar{M}$，这是因为 $\bar{M}$ 是连续函数和它们的按点收敛的极限，即所谓第一类 Baire 函数的集，而 $\bar{\bar{M}}$ 是第一类 Baire 函数和它们的极限的集，即第二类 Baire 函数[1].

---

1) 关于 Baire 分类见[21].

§4 完备空间、某些具体空间的完备性

定义 距离空间X的元列 $\{x_n\}$ 称为自收敛的或称基本列，如果任给 $\varepsilon>0$ 存在 $n_0(\varepsilon)$ 使得 $\rho(x_n, x_m)<\varepsilon$ 对所有 $n, m \geqslant n_0(\varepsilon)$.

如果序列$\{x_n\}$收敛于极限 x_0，那么$\{x_n\}$自收敛.

事实上，若设 $x_0=\lim\limits_{n} x_n$. 那么任给 $\varepsilon>0$ 存在数 $n_0(\varepsilon)$ 使得

$$\rho(x_n, x_0)<\frac{\varepsilon}{2}$$

对 $n \geqslant n_0(\varepsilon)$. 从而

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, x_0)+\rho(x_m, x_0)<\varepsilon$$

对 $n, m \geqslant n_0(\varepsilon)$. 这就是所要证明的.

对于任一个距离空间，上述定理的逆定理不一定成立. 因为有这样的距离空间，在其内有不收敛于任何极限的自收敛序列存在.

例 1. 设X是有理数集. 用公式

$$\rho(r_1, r_2)=|r_1-r_2|$$

定义距离后，则X是一距离空间.

取序列

$$r_1=\frac{1}{2}, \quad r_2=\frac{1}{4}, \cdots, \quad r_n=\frac{1}{2^n}, \cdots.$$

这个序列自收敛. 不仅如此，而且以 $r_0=0$ 为其极限. 但若取序列

$$r_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

那么这个序列也自收敛. 但它在空间X则无极限，因为

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

为无理数.

例 2. 设X是多项式 $p(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$,空间具 Чебышев 距离,即是说,若 $p(t)$ 和 $Q(t)\in X$,则令

$$\rho(p,Q)=\max_t|p(t)-Q(t)|.$$

设 $\{p_n(t)\}$ 是一个一致收敛于某一连续函数的多项式序列,并设这个连续函数不是一个多项式.显然,序列 $\{p_n(t)\}$ 是一个基本列,但在X内无极限.

若距离空间X的每一基本列都以同空间X的某一元为其极限,我们就说空间X是**完备的**.

值得注意的是: 完备空间内任一闭集也是一个完备空间.

现在我们来证明某些具体的距离空间的完备性.

E_n 空间的完备性 对 n 维欧氏空间 E_n, 它的完备性由 Cauchy 的关于这个空间的点列的极限存在判别法可以证明.

$C[0,1]$ 空间的完备性 设给定序列 $\{x_n(t)\}$,其中 $x_n(t)\in C[0,1]$, $n=1,2,\cdots$. 令

$$\rho(x_n,x_m)\to 0$$

对 $n, m\to\infty$. 这就是说,序列$\{x_n(t)\}$在$[0,1]$上满足 Cauchy 一致收敛条件. 设 $x_0(t)$ 是序列 $\{x_n(t)\}$的极限. 作为连续函数列一致收敛的极限,这个函数也是在$[0,1]$上连续的. 由此 $x_0(t)\in C[0,1]$ 且 $\rho(x_n,x_0)\to 0$. 所以 $C[0,1]$ 是完备的.

m空间的完备性 设 $\{x_n\}$ 是m空间的一个自收敛元列. 设 $x_n=\{\xi_i^{(n)}\}$. 因为 $x_n\in m$, 所以 $|\xi_i^{(n)}|\leqslant K_n$ 对 $i=1,2,\cdots$. $\{x_n\}$ 既然自收敛,所以给定 $\varepsilon>0$ 存在 $n_0(\varepsilon)$ 使得 $\rho(x_n,x_k)<\varepsilon$ 对 $n, k\geqslant n_0(\varepsilon)$,或

$$\sup_i |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(k)}| < \varepsilon \quad \text{对} \ n, k \geqslant n_0(\varepsilon).$$

由此可知,对 $n, k \geqslant n_0(\varepsilon)$,

$$|\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(k)}| < \varepsilon \tag{1}$$

关于 i 一致成立.

固定 i, 由(1)序列 $\{\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}, \cdots \xi_i^{(n)}, \cdots\}$ 是一个满足 Cauchy 极限存在条件的序列,从而收敛于某一 ξ_i. 由此得出一个序列 $\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n \cdots\}$.

在不等式(1)令 k 趋于无穷,我们得出不等式

$$|\xi_i^{(n)} - \xi_i| \leqslant \varepsilon \tag{2}$$

对所有 $n \geqslant n_0(\varepsilon)$ 和所有 i. 由此

$$|\xi_i| \leqslant |\xi_i^{(n_0)} - \xi_i| + |\xi_i^{(n_0)}| \leqslant \varepsilon + K_{n_0}.$$

这个不等式既然对所有 i 成立,所以 $\{\xi_i\}$ 是一有界序列,即 $x_0 = \{\xi_i\} \in m$. 再由(2)得

$$\sup_i |\xi_i^{(n)} - \xi_i| \leqslant \varepsilon \quad \text{对} \ n \geqslant n_0(\varepsilon).$$

亦即 $\rho(x_n, x_0) \leqslant \varepsilon$ 对 $n \geqslant n_0(\varepsilon)$. ε 是任意的,上式是说 $x_n \to x_0$ 对 $n \to \infty$. 这就证明了 m 空间的完备性.

c 空间的完备性 我们证明 c 空间作为 m 空间的子集是 m 内闭集,从而得出 c 空间的完备性.

设 $\{x_n\}$, 其中 $x_n = \{\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \cdots, \xi_i^{(n)} \cdots\}$, 是 c 内一个序列的元且 $x_n \to x_0$,其中 $x_0 = \{\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \cdots, \xi_i^{(0)}, \cdots\}$. 我们要证明的是 $\{\xi_i^{(0)}\}$ 为一收敛序列. 事实上,

$$\begin{aligned} |\xi_i^{(0)} - \xi_j^{(0)}| &\leqslant |\xi_i^{(0)} - \xi_i^{(n)}| \\ &\quad + |\xi_i^{(n)} - \xi_j^{(n)}| + |\xi_j^{(n)} - \xi_j^{(0)}| \\ &\leqslant 2\rho(x_n, x_0) + |\xi_i^{(n)} - \xi_j^{(n)}|. \end{aligned}$$

给定 $\varepsilon > 0$,选 n 充分大使 $\rho(x_n, x_0) < \dfrac{\varepsilon}{4}$. 固定这样一个 n. 又因 $\{\xi_i^{(n)}\}$ 是收敛序列,所以存在 n_0 使得对 $i, j \geqslant n_0$

$$|\xi_i^{(n)} - \xi_j^{(n)}| < \frac{\varepsilon}{2},$$

由此
$$|\xi_i^{(0)} - \xi_j^{(0)}| < \varepsilon$$

对 $i, j \geqslant n_0$. 换句话说$\{\xi_i^{(0)}\}$是收敛序列,亦即 $x_0 \in c$.

$\widetilde{M}[0,1]$空间的完备性 设$\{x_n\}$是 $\widetilde{M}[0,1]$ 空间内一个自收敛序列. 于是任给 $\varepsilon > 0$. 对 $n, m \geqslant n_0(\varepsilon)$ 有

$$\inf_{E, \operatorname{mes} E=0} \{ \sup_{t \in [0,1] \setminus E} |x_n(t) - x_m(t)| \} < \varepsilon.$$

从而存在集合 E_{n_0} 使得 $\operatorname{mes} E_{n_0} = 0$ 且

$$\sup_{t \in [0,1] \setminus E_{n_0}} |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon, \quad n, m \geqslant n_0(\varepsilon),$$

换句话说,在[0,1]上殆遍有

$$|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon \quad 对 n, m \geqslant n_0(\varepsilon).$$

由此可知(见 §3 例)有界可测函数列$\{x_n(t)\}$在[0,1]上殆遍一致收敛，从而存在有界可测函数 $x_0(t)$ 殆遍是这个序列的极限. 由此易见 $\rho(x_n, x_0) \to 0$，这就证明了 $\widetilde{M}[0,1]$ 的完备性.

$L_p[0,1]$ 空间和 l_p 空间的完备性 在实变函数教程中(见[21])证明了 $L_2[0,1]$ 及 l_2 为完备空间. 同样方法可以证明 $L_p[0,1]$ 及 l_p 的完备性. 我们将不在这里重复这个证明，而把 $L_p[0,1]$ 和 l_p 的完备性作为泛函分析的一个一般定理(见第四章 § 3)的推论.

§ 5 距离空间的完备化

如所熟知，数直线的完备性在数学分析中起着何等重要的作用. 只有构造了完备的实数集，数学分析才有了严格的基础. 同样理由，距离空间的完备性在泛函分析中也占着很

重要的位置．正因为这样，我们现在来讨论使一个不完备距离空间完备化的方法．这个方法类似于补充无理数集于有理数集而使之完备化．讨论之前，我们介绍一个概念，它在以后另外的地方也要用到．

设给定了两个距离空间X和Y．我们用$\rho(x_1, x_2)$代表空间X的元x_1和x_2的距离，并用$\rho(y_1, y_2)$代表空间Y的元y_1和y_2的距离．

如果在空间X和Y的元之间建立了这样一个一一对应，使得同空间的两个元之间的距离等于另一空间的对应元之间的距离，我们就说空间X和Y是**等距的**．

由这个观点不难理解，如只从与元的距离有关的问题来看，例如收敛性的问题，完备性的问题等等，两个等距的空间可以看做是恒等的．

我们不仅可以讨论空间X和Y的等距性，而且可以考虑含于这些空间的集的等距性，并且认为对距离空间某一集所得出的仅与距离有关结果对与之等距的所有集均成立．

设给定距离空间X_0．设X_0不为完备的；就是说在X_0内存在自收敛列而在X_0内无极限．

我们证明，在这个情形下存在另外一个距离空间X具有下述性质：X是完备的，且在X内存在一个与X_0等距并在X内到处稠密的子集X'．我们称X为X_0的**完备化**．

为此我们考虑空间X_0的元的所有基本列

$$\{x_n\},\ \{y_n\},\ \{z_n\},\cdots,$$

任意两个基本列$\{x_n\}$和$\{x'_n\}$，如果满足$\rho(x_n, x'_n)\to 0, n\to\infty$，我们就把这两个基本列归入同一类．把这些类$\tilde{x}$看成元来构造一个新空间$X$．在空间$X$中任取两个元$\tilde{x}, \tilde{y}\in X$．然后在每一类$\tilde{x}$和$\tilde{y}$中各取一个序列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$．

先证明极限$\lim\limits_n \rho(x_n, y_n)$存在．事实上，我们有

$$\rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_n, x_m) + \rho(x_m, y_m) + \rho(y_m, y_n).$$

由此

$$\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m) \leqslant \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m). \quad (1)$$

交换 m 和 n 得

$$\rho(x_m, y_m) - \rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m). \quad (2)$$

由(1),(2)

$$|\rho(x_m, y_m) - \rho(x_n, y_n)| \leqslant \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m).$$

等式右端当 $n, m \to \infty$ 时趋近于零,因此数列 $\{\rho(x_n, y_n)\}$ 满足 Cauchy 条件,从而 $\lim\limits_n \rho(x_n, y_n)$ 存在.

现在依下述公式在 X 内引入距离

$$\rho(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_n \rho(x_n, y_n).$$

我们证明这样定义的距离不随序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 在对应的类中的选择而变.

在同一类 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{y}$ 中另取两个序列 $\{x_n'\}$ 和 $\{y_n'\}$. 于是

$$\rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_n, x_n') + \rho(x_n', y_n') + \rho(y_n', y_n).$$

从而

$$\lim_n \rho(x_n, y_n) \leqslant \lim_n \rho(x_n', y_n').$$

同理可得

$$\lim_n \rho(x_n', y_n') \leqslant \lim_n \rho(x_n, y_n).$$

结果

$$\lim_n \rho(x_n, y_n) = \lim_n \rho(x_n', y_n').$$

现在来证明这样定义的 $\rho(\tilde{x}, \tilde{y})$ 是满足距离公理的.

1. 因为 $\rho(x_n, y_n) \geqslant 0$,所以也有

$$\rho(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_n \rho(x_n, y_n) \geqslant 0.$$

此外,等式

$$\rho(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_n \rho(x_n, y_n) = 0$$

是说 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 这两个序列属于同一个类.

因为 $\{x_n\}$ 是类 $\tilde{x}$ 的任一序列，而 $\{y_n\}$ 则是类 $\tilde{y}$ 的任一序列，所以 $\tilde{x}=\tilde{y}$.

2. $\rho(\tilde{x},\tilde{y})=\rho(\tilde{y},\tilde{x})$ 是显然的.

3. 若 $\{x_n\}\in\tilde{x}$, $\{y_n\}\in\tilde{y}$, $\{z_n\}\in\tilde{z}$, 那么

$$\rho(\tilde{x},\tilde{z})=\lim_n\rho(x_n,y_n)\leqslant$$

$$\leqslant\lim_n\rho(x_n,y_n)+\lim_n\rho(y_n,z_n)$$

$$=\rho(\tilde{x},\tilde{y})+\rho(\tilde{y},\tilde{z}).$$

我们再来证明X是一个完备空间. 取空间X的元列 $\{\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\tilde{x}_3,\cdots\}$. 设此元列自收敛,即是说

$$\rho(\tilde{x}_n,\tilde{x}_m)\to 0 \quad 对\ n,\ m\to\infty.$$

在每一类 $\tilde{x}_n$ 中取出一个序列

$$\{x_1^{(n)},x_2^{(n)},\cdots,x_k^{(n)},\cdots\}.$$

因为这个序列自收敛,所以可选这样的 k_n 使

$$\rho(x_p^{(n)},x_{k_n}^{(n)})<\frac{1}{n} \quad 对\ p>k_n.$$

现在我们来讨论序列

$$\{x_{k_1}^{(1)},x_{k_2}^{(2)},\cdots,x_{k_n}^{(n)},\cdots\},$$

可以证明这个序列自收敛. 我们有

$$\rho(x_{k_n}^{(n)},x_{k_m}^{(m)})\leqslant\rho(x_{k_n}^{(n)}x_p^{(n)})+\rho(x_p^{(n)},x_p^{(m)})+\rho(x_p^{(m)},x_{k_m}^{(m)}). \tag{3}$$

任给 $\varepsilon>0$. 因为

$$\rho(\tilde{x}_n,\tilde{x}_m)\to 0 \quad 对\ n,\ m\to\infty,$$

所以存在 n_0 使得对 n, $m\geqslant n_0$,

$$\rho(\tilde{x}_n,\tilde{x}_m)=\lim_p\rho(x_p^{(n)},x_p^{(m)})<\frac{\varepsilon}{2},$$

因此对 n, $m\geqslant n_0$ 和充分大的 p 将有

$$\rho(x_p^{(n)},x_p^{(m)})<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

这时不妨设 $\frac{1}{n_0}<\frac{\varepsilon}{4}$. 固定满足条件 $n, m \geqslant n_0$ 的 n 和 m 后可设 p 充分大使得 $p>k_m$,且 $p>k_n$. 于是由数 k_n 和 k_m 的选择而有

$$\rho(x_p^{(n)}, x_{k_n}^{(n)})<\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{4}, \quad \rho(x_p^{(m)}, x_{k_m}^{(m)})<\frac{1}{m}<\frac{\varepsilon}{4}. \tag{5}$$

由(3)(4)和(5)可知对 $n, m \geqslant n_0$

$$\rho(x_{k_n}^{(n)}, x_{k_m}^{(m)})<\varepsilon,$$

这就是说,序列 $\{x_{k_n}^{(n)}\}$ 自收敛.

用 $\tilde{x}$ 代表含序列 $\{x_{k_n}^{(n)}\}$ 的类. 我们来证明 $\tilde{x}_n \rightarrow \tilde{x}$. 显然有

$$\begin{aligned}
\rho(\tilde{x}_n, \tilde{x}) &= \lim_p \rho(x_p^{(n)}, x_{k_p}^{(p)}) \\
&\leqslant \lim_p \rho(x_p^{(n)}, x_{k_n}^{(n)})+\lim_p p(x_{k_n}^{(n)}, x_{k_p}^{(p)}) \\
&<\frac{1}{n}+\lim_p \rho(x_{k_n}^{(n)}, x_{k_p}^{(p)}).
\end{aligned} \tag{6}$$

因为序列 $\{x_{k_n}^{(n)}\}$ 自收敛,所以给定 $\varepsilon>0$ 存在 n_0 使得

$$\rho(x_{k_n}^{(n)}, x_{k_p}^{(p)})<\frac{\varepsilon}{2}$$

对 $n, p \geqslant n_0$. 由此

$$\lim_p \rho(x_{k_n}^{(n)}, x_{k_p}^{(p)}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \tag{7}$$

对 $n \geqslant n_0$. 不失一般性可设 $\frac{1}{n_0}<\frac{\varepsilon}{2}$. 由 (6) (7) 可知对 $n \geqslant n_0$

$$\rho(\tilde{x}_n \tilde{x})<\varepsilon,$$

这就是说,$\{\tilde{x}_n\}$收敛于元 $\tilde{x}$,从而 X 的完备性得证.

在继续讨论中我们引入**常驻序列**,即是说,形如$\{x, x, \cdots,$

$x, \cdots\}$的序列．这种序列显然自收敛．因此每一常驻序列属于某一类，显然，同一类中只能含有一个常驻序列．今若

$$\{x, x, \cdots, x, \cdots\} \in \tilde{x}, \quad \{y, y, \cdots, y, \cdots\} \in \tilde{y},$$

那么显然有

$$\rho(x, y) = \rho(\tilde{x}, \tilde{y}).$$

现在来证明 X_0 等距于空间 X 的某一个在 X 中稠密的子集 X'．为此我们把含有常驻序列的所有类 $\tilde{x}$ 取出来构成一个集 X'，在类 $\tilde{x} \in X'$ 以及构成含于它的常驻序列$\{x, x, \cdots, x, \cdots\}$的元 $x \in X_0$ 之间存在一个一一对应，而且若 $\{x\} \in \tilde{x}$，$\{y\} \in \tilde{y}$，那么 $\rho(\tilde{x}, \tilde{y}) = \rho(x, y)$．这就是说，这样在 X_0 和 X' 之间建立的一一对应是一个等距．

容易证明 X' 在 X 内处处稠密，即是说，对于任意数 $\varepsilon > 0$ 和任意元 $\tilde{x} \in X$，存在元 $\tilde{x}_\varepsilon \in X'$ 使 $\rho(\tilde{x}, \tilde{x}_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$．事实上，设 $\tilde{x}$ 含自收敛列 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$．取这样的 n 使$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ 对 $m > n$．构造常驻序列 $\{x_n, x_n, \cdots, x_n, \cdots\}$并用 $\tilde{x}_\varepsilon$ 代表含这个序列的类．显然 $\tilde{x}_\varepsilon \in X'$，而且

$$\rho(\tilde{x}, \tilde{x}_\varepsilon) = \lim_m \rho(x_m, x_n) \leqslant \varepsilon,$$

这就是所要证明的．

最后我们还要证明空间 X_0 的完备化除等距外唯一确定，即是说，除去等距的空间不计外，仅存在唯一个完备空间 X 含有一个与 X_0 等距且在 X 内稠密的子集．事实上，设 Y 是另一个完备空间而 X_0 在其内稠密．那么每一点 $\tilde{y} \in Y$ 总是某一序列$\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\} \subset X_0$ 的极限．因为这个序列自收敛，所以它确定了某一元 $\tilde{x} \in X$．令元 $\tilde{x}$ 与元 $\tilde{y}$ 相对应．反之，设给定元 $\tilde{\xi} \in X$ 且$\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots\}$是含于类 $\tilde{\xi}$ 的某一基本列．因为这个基本列含于完备空间 Y，所以它定义了某一元 $\tilde{\eta} \in Y$．我们就令这个元与 $\tilde{\xi}$ 成对应．这样我们就得

空间X和Y的元之间的一个对应，而且这个对应显然是一对一的．此外，由于

$$\rho(\tilde{x}, \tilde{\xi}) = \lim_n \rho(x_n, \xi_n) = \rho(\tilde{y}, \tilde{\eta})^{1)},$$

所以这个对应也是一个等距．综合上述，完全证明了所要结果．

例 1． 取空间l'_p．l'_p是由所有有序数组$\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{k_1}, 0, 0, 0, \cdots\}$所组成，其中$\xi_i$为任意实数，$k_1$为任意自然数．如果

$$x = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{k_1}, \cdots\}, \quad y = \{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{k_2}, \cdots\}$$

且 $k_2 \geqslant k_1$，那么令

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{k_1} |\xi_i - \eta_i|^p + \sum_{i=k_1+1}^{k_2} |\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

l'_p是l_p的子空间，但不是完备的．例如序列

$$x_1 = \{1, 0, 0, \cdots\}, \quad x_2 = \left\{1, \frac{1}{2}, 0, 0, \cdots\right\}, \cdots,$$

$$x_n = \left\{1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots\right\}, \cdots$$

是自收敛的：

$$\rho(x_n, x_m) = \left(\sum_{i=m}^{n-1} \frac{1}{2^{ip}}\right)^{\frac{1}{p}} \to 0 \text{ 对 } m, n \to \infty, m <$$

n，但在空间l'_p无极限．

我们用X代表空间l'_p的完备化，但在另一方面l'_p在完备空间l_p内是稠密的，所以X等距于l_p．因此空间l'_p的完备化是一个与l_p等距的空间．

例 2． 设 $C_0[0,1]$ 是定义在$[0,1]$上的所有多项式所成的空间．在此空间内引入 Чебышев 距离

1) 容易证明，在距离空间中若$x_n \to x$，且$y_n \to y$，那么$\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y)$．

$$\rho(p,q) = \max_t |p(t) - q(t)|.$$

空间 $C_0[0,1]$ 显然不是完备的. 因为 $C_0[0,1]$ 在完备空间 $C[0,1]$ 内稠密, 所以空间 $C_0[0,1]$ 的完备化导致一个与 $C[0,1]$ 等距的空间.

例 3. 令 $L'_p[0,1]$ 代表定义在 $[0,1]$ 上所有的连续函数以

$$\rho(x,y) = \left(\int_0^1 |x(t) - y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

为距离的空间. $L'_p[0,1]$ 不是完备空间, 因为存在依 p 次幂平均收敛于不连续函数的连续函数列. 这个函数列自然是 $L'_p[0,1]$ 内一个基本列, 但在 $L'_p[0,1]$ 内无极限. 使 $L'_p[0,1]$ 完备化后得出一个与 $L_p[0,1]$ 等距的空间.

§6 关于完备空间的几个定理

在完备距离空间内有类似于 Cantor 区间套引理的定理成立:

定理 1 设在完备距离空间 X 内给定一序列的闭球, 且这一序列闭球的后面的每一个都含于前一个之内. 再设此闭球列的半径趋近于零. 那么存在一点且仅一点含于这个序列的所有的球内.

设所给的闭球列是

$$\bar{S}(a_1, \varepsilon_1), \bar{S}(a_2, \varepsilon_2), \cdots, \bar{S}(a_n, \varepsilon_n), \cdots$$

依定理的假设

$$\bar{S}_1 \supset \bar{S}_2 \supset \cdots \supset \bar{S}_n \supset \cdots \quad (\bar{S}_n = \bar{S}(a_n, \varepsilon_n)).$$

我们来考虑这些球的中心所成的序列

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots.$$

因为 $\bar{S}_{n+p}\subset\bar{S}_n$，所以 $a_{n+p}\in\bar{S}(a_n\varepsilon_n)$. 因此

$$\rho(a_{n+p},a_n)\leqslant\varepsilon_n.$$

从而

$$\rho(a_{n+p},a_n)\to 0$$

对 $n\to\infty$. 即这些球的中心所成的序列自收敛.

因为空间 X 是完备的，所以这个序列收敛于某一极限 $a\in X$. 任取球 $\bar{S}_k$ (k 是一个固定数). 那么 a_k, a_{k+1}, $\cdots$, a_{k+n}, $\cdots$ 均含于此球. 由于球 $\bar{S}_k$ 是闭的，所以序列 a_k, a_{k+1}, $\cdots$, a_{k+n}, $\cdots$ 的极限 a 也含于 $\bar{S}_k$,从而

$$a=\lim_n a_n$$

含于所有的球.

今设存在异于 a 点的 $b\in X$ 也含于所有的球,即是说

$$\rho(a,b)=\delta>0.$$

既然 a 和 $b\in\bar{S}_n$, $n=1,2,\cdots$ 所以必须有

$$\delta=\rho(a,b)\leqslant\rho(a,a_n)+\rho(a_n,b)\leqslant 2\varepsilon_n.$$

这是不可能的,因为 $\varepsilon_n\to 0$ 对 $n\to\infty$.

注. 我们可以把上面证明的定理作某些推广. 距离空间有界集 F 的直径是指如下定义的数

$$d(F)=\sup_{x,y\in F}\rho(x,y).$$

定理 1′ 设在完备距离空间 X 内给定一个有界闭集列. 且这一序列的集的后面的每一个都含于前一个之内. 再设此集列的直径趋近于零. 那么存在一点且仅一点含于这个集列的每一个.

证明实质上同于定理 1 的证明.

如所熟知,由 Cantor 引理建立的这一数直线的性质可以取做实数集或数直线的完备性的定义.

闭球套的类似定理也同样地特征化了距离空间的完备性.

定理 2 如果距离空间 X 内任一个半径趋近于零的闭球套(即后面每一个球均含于前一个之内的闭球列)都有非空的交，那么空间 X 是完备的.

设给定基本列 $\{x_n\}$. 取 n_k 使

$$\rho(x_{n_k+p}, x_{n_k}) < \frac{1}{2^k}$$

对任意 $p > 0$. 设 $\bar{S}_k$ 是以 x_{n_k} 为中心 $\frac{1}{2^{k-1}}$ 为半径的闭球. 我们有 $\bar{S}_{k+1} \subset \bar{S}_k$. 事实上，若 $x \in \bar{S}_{k+1}$，那么

$$\rho(x, x_{n_k}) \leqslant \rho(x, x_{n_{k+1}}) + \rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k})$$
$$\leqslant \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}},$$

即 $x \in \bar{S}_k$.

球 $\bar{S}_k$ 的半径趋近于零，所以依假设存在一点 x_0 属于所有的球 $\bar{S}_k$. 我们来证明 x_0 是序列 $\{x_n\}$ 的极限. 首先，子序列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 x_0，这是因为 $x_{n_k}, x_0 \in \bar{S}_k$，从而

$$\rho(x_{n_k}, x_0) \leqslant \frac{1}{2^{k-1}} \to 0.$$

但这时整个序列 $\{x_n\}$ 也收敛于 x_0，因为

$$\rho(x_n, x_0) \leqslant \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x_0),$$

而且右端两项可使之任意小，如果选择 n, n_k 充分大的话. 定理证毕.

集 M 称为第一纲集，如果它可表为不超过可数个到处不稠的集的并，不是第一纲集的集称为第二纲集. 例如直线上的有理点集显然是第一纲集，而所有无理点的集则是第二纲集，这由下述定理容易得出.

定理 3 完备空间是第二纲集.

假如不然，设完备空间 X 可表为 $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$，其中 M_n，

$n=1, 2, \cdots$到处不稠．今取一个球 $\bar{S}(a, 1)$ 以任一点 a 为中心并以 1 为半径．因为 M_1 到处不稠，所以在球 $\bar{S}(a, 1)$ 内存在一个球 $\bar{S}(a_1, r_1)$ 具有半径 $r_1<\frac{1}{2}$ 而不含 M_1 的点，又因为 M_2 也是到处不稠的，所以在 $\bar{S}(a_1, r_1)$ 内存在一个球 $\bar{S}(a_2, r_2)$ 具有半径 $r_2<\frac{1}{2^2}$ 而不含 M_2 的点．其余照此类推．

这样，我们就得出一个闭球序列

$$\bar{S}(a_1, r_1),\ \bar{S}(a_2, r_2), \cdots, \bar{S}(a_n, r_n), \cdots$$

其中的每一个都含于前一个，而且半径趋近于零．由假设 $\bar{S}(a_n r_n)$ 不含集 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 的点．根据上述定理 1 存在一点 $a_0\in X$ 含于所有的球．但在另一方面 a_0 不属于任一集 M_n；所以

$$a_0\bar{\in} X=\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n.$$

这是一个矛盾．定理证毕．

§7 压缩映象原理

如所周知，逐次逼近法或叠代法对于代数方程，微分方程，积分方程和其它的方程的解的存在定理的证明有很广泛的应用．这个方法除去其广泛应用性外，它的重大价值还在于提供了方程的近似解的构造．各种不同类型的方程的逐次逼近法在泛函分析中形成了一个一般的原则，这就是压缩映象原理（首先由波兰数学家 S. Banach 得出）．

定理 1 设在完备距离空间 X 中给定了一个映 X 于其自

身内的算子 A. 又设对 X 的所有元 x, y

$$\rho(A(x), A(y)) \leqslant \alpha\rho(x, y), \tag{1}$$

其中 $\alpha < 1$ 且不依赖于 x 和 y. 那么存在一点且仅一点 x_0 使得 $A(x_0) = x_0$.

我们称点 x_0 为算子 A 的不动点.

任取固定元 $x \in X$, 且令

$$x_1 = A(x),\ x_2 = A(x_1), \cdots, x_n = A(x_{n-1}), \cdots.$$

我们证明序列自收敛. 为此我们先注意以下不等式:

$$\rho(x_1, x_2) = \rho(A(x), A(x_1)) \leqslant \alpha\rho(x, x_1)$$
$$= \alpha\rho(x, A(x)),$$
$$\rho(x_2, x_3) = \rho(A(x_1), A(x_2)) \leqslant \alpha\rho(x_1, x_2)$$
$$\leqslant \alpha^2\rho(x, A(x)),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\rho(x_n, x_{n+1}) \leqslant \alpha^n\rho(x, A(x)),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

此外

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \leqslant \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots +$$
$$+ \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p})$$
$$\leqslant (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \cdots + \alpha^{n+p-1})\rho(x, A(x))$$
$$= \frac{\alpha^n - \alpha^{n+p}}{1-\alpha}\rho(x, A(x)). \tag{2}$$

依假设 $\alpha < 1$, 所以

$$\rho(x_n, x_{n+p}) < \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x, A(x)),$$

由此可知 $\rho(x_n, x_{n+p}) \to 0$ 对 $n \to \infty$, $p > 0$. 这就是说序列 $\{x_n\}$ 自收敛. 既然空间 X 是完备的, 那么存在一点 $x_0 \in X$ 而且是这个序列的极限,

$$x_0 = \lim_n x_n.$$

今证 $A(x_0)=x_0$. 事实上,

$$\begin{aligned}\rho(x_0, A(x_0)) &\leqslant \rho(x_0, x_n)+\rho(x_n, A(x_0)) \\ &= \rho(x_0, x_n)+\rho(A(x_{n-1}), A(x_0)) \\ &\leqslant \rho(x_0, x_n)+\alpha\rho(x_{n-1}, x_0).\end{aligned}$$

对任意给定的 $\varepsilon>0$,可选 n 充分大使

$$\rho(x_0, x_n)<\frac{\varepsilon}{2}, \quad \rho(x_0, x_{n-1})<\frac{\varepsilon}{2\alpha}.$$

由此

$$\rho(x_0, A(x_0))<\varepsilon.$$

既然 $\varepsilon>0$ 是任意的,那么 $\rho(x_0, A(x_0))=0$, 即 $A(x_0)=x_0$.

如果存在两个元 $x_0, y_0\in X$ 使得

$$A(x_0)=x_0, \quad A(y_0)=y_0.$$

那么 $\rho(x_0, y_0)=\rho(A(x_0)A(y_0))\leqslant\alpha\rho(x_0y_0)$. 如果 $\rho(x_0, y_0)>0$, 那么由上述不等式 $\alpha\geqslant 1$, 而这是不可能的. 证毕.

如果在上述公式(2)中令 $p\to\infty$, 那么我们就得出 n 次逼近的误差估值式:

$$\rho(x_n, x_0)\leqslant\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x, A(x)). \tag{3}$$

注 1. 收敛于不动点 x_0 的逐次逼近 x_n 可以由任一元 $x\in X$ 出发而得出. 元 x 的选择仅涉及$\{x_n\}$收敛于其极限的速度.

注 2. 有时必须考虑这样的映象 A, 对于它来说不等式(1) 不是在整个空间而是仅在它的某一点 $\bar{x}$ 的一个闭邻域 $\bar{S}(\bar{x}, r)$ 成立. 这时在算子 A 映这个球于其自身内这一补充假设之下,压缩映象原理仍然成立,因为这时所得的逐次逼近不超出所考虑的邻域. 例如设除(1)之外再作补充假设

$$\rho(\bar{x}, A(\bar{x})) \leqslant (1-\alpha) r.$$

这时，若 $x \in \bar{S}(\bar{x}, r)$，那么 $A(x) \in \bar{S}(\bar{x}, r)$，因为

$$\begin{aligned} \rho(A(x), \bar{x}) &\leqslant \rho(A(x), A(\bar{x})) + \rho(A(\bar{x}), \bar{x}) \\ &\leqslant \alpha\rho(x, \bar{x}) + \rho(\bar{x}, A(\bar{x})) \\ &\leqslant \alpha r + (1-\alpha) r = r. \end{aligned}$$

由此我们可以把 A 看作定义在完备距离空间 $\bar{S}(\bar{x}, r)$（见 25 页）上的算子，而且由于它在这个空间满足条件(1)，所以依上述证明 A 在 $\bar{S}(\bar{x}, r)$ 内有唯一不动点.

现在我们举几个例子作为压缩映象原理的应用.

用叠代法解线性代数方程组 我们考虑算术 n 维空间. 设 $x = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$，$y = \{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n\}$. 再令

$$\rho(x, y) = \max_i |\xi_i - \eta_i|.$$

容易证明，这样定义的距离空间 m_n 是完备的. 在此空间内考虑算子 $y = A(x)$ 由下述等式给定：

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j + b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

我们有

$$\begin{aligned} \rho(y_1, y_2) &= \rho(A(x_1), A(x_2)) \\ &= \max_i |\eta_i^{(1)} - \eta_i^{(2)}| \\ &= \max_i \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}) \right| \\ &\leqslant \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \, |\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}| \\ &\leqslant \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \max_j |\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}| \\ &= \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \rho(x_1, x_2). \end{aligned}$$

现在如果我们假设

$$\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| < 1, \tag{4}$$

对所有的 i，那么压缩映象原理的条件被满足，从而算子有唯一不动点．由此得出如下定理．

定理 2 如果矩阵 (a_{ij}) 满足 $\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|<1$ 对所有的 i，那么方程组

$$\xi_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j = b_i,\quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

有唯一解 $x_0 = \{\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \cdots, \xi_n^{(0)}\}$．这个解可由任一矢量 $x = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$ 出发用叠代法得出．

条件(4)是保证叠代法收敛的充分条件．如果在 n 维空间中引入另外的距离，那么可得另外的收敛条件．例如设

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \eta_i)^2},$$

那么对这个距离来说

$$\begin{aligned}
\rho(y_1, y_2) &= \rho(A(x_1), A(x_2)) \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)})\right\}^2} \\
&\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \sum_{j=1}^{n}(\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)})^2\right\}} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}\ \rho(x_1, x_2).
\end{aligned}$$

因此在这个情形下逐次逼近的收敛条件是

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 < 1.$$

积分方程解的存在和唯一性 设 $K(t,s)$ 是定义于正方形 $a \leqslant t, s \leqslant b$ 上可测实函数. 满足

$$\int_a^b \int_a^b K^2(t,s)dtds < +\infty, \tag{5}$$

再设 $f(t) \in L_2[a,b]$. 我们证明,积分方程

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)x(s)ds$$

对每一充分小的参数值 λ 有唯一解 $x(t) \in L_2[a,b]$. 考虑算子

$$A(x) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)x(s)ds.$$

可证这个算子把每一函数 $x(t) \in L_2[a,b]$ 映象于同空间的一个函数. 由于 $f(t) \in L_2[a,b]$,只证算子

$$A_0(x) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds$$

映每一函数 $x(t) \in L_2[a,b]$ 于同空间的一个函数就够了.

由条件(5)及 Fubini 定理(例如见[21])可知 $K^2(t,s)$ 对殆遍 $t \in [a,b]$ 在 $[a,b]$ 上关于 s 可积, 由此可知对殆遍 $t \in [a,b]$ 及 Cauchy-Буняковский 不等式积分

$$\int_a^b K(t,s)x(s)ds = y(t)$$

存在,而且

$$y^2(t) = \left(\int_a^b K(t,s)x(s)ds\right)^2$$

$$\leqslant \int_a^b K^2(t,s)ds \int_a^b x^2(s)ds.$$

因为

$$\int_a^b x^2(s)ds$$

是常数且由 Fubini 定理与条件(5)知

$$\int_a^b K^2(t,s)ds$$

关于 t 在$[a,b]$可积分．由此

$$\int_a^b y^2(t)\,dt \leqslant \int_a^b \int_a^b K^2(t,s)\,dt\,ds \int_a^b x^2(s)\,ds.$$

现在我们来计算 $\rho(A(x),\ A(y))$．我们有

$$\begin{aligned}
&\rho(A(x),\ A(y)) \\
&= \left\{ \int_a^b \left(\lambda \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds - \lambda \int_a^b K(t,s)y(s)\,ds \right)^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= |\lambda| \left\{ \int_a^b \left(\int_a^b K(t,s)[x(s)-y(s)]\,ds \right)^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant |\lambda| \left(\int_a^b \int_a^b K^2(t,s)\,dt\,ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b [x(s)-y(s)]^2\,ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= |\lambda| \left(\int_a^b \int_a^b K^2(t,s)\,dt\,ds \right)^{\frac{1}{2}} \rho(x,y).
\end{aligned}$$

如果

$$|\lambda| < \frac{1}{\left(\int_a^b \int_a^b K^2(t,s)\,dt\,ds \right)^{\frac{1}{2}}}, \tag{6}$$

那么压缩映象原理的条件被满足，从而对满足条件(6)的 λ 值，积分方程的解存在且唯一．

对偏微分方程的应用

作为第三个例子，我们来讨论具有两个变数的二阶拟线性双曲型方程的 Cauchy 问题．

设在平面 xOy（图 1）给定这样一条光滑曲线 AB 使得任一平行 x 轴或 y 轴的直线最多与它相交于一点．现在我们要求出一个函数 $u(x,y)$ 在曲边三角形 ABC 内部满足方程

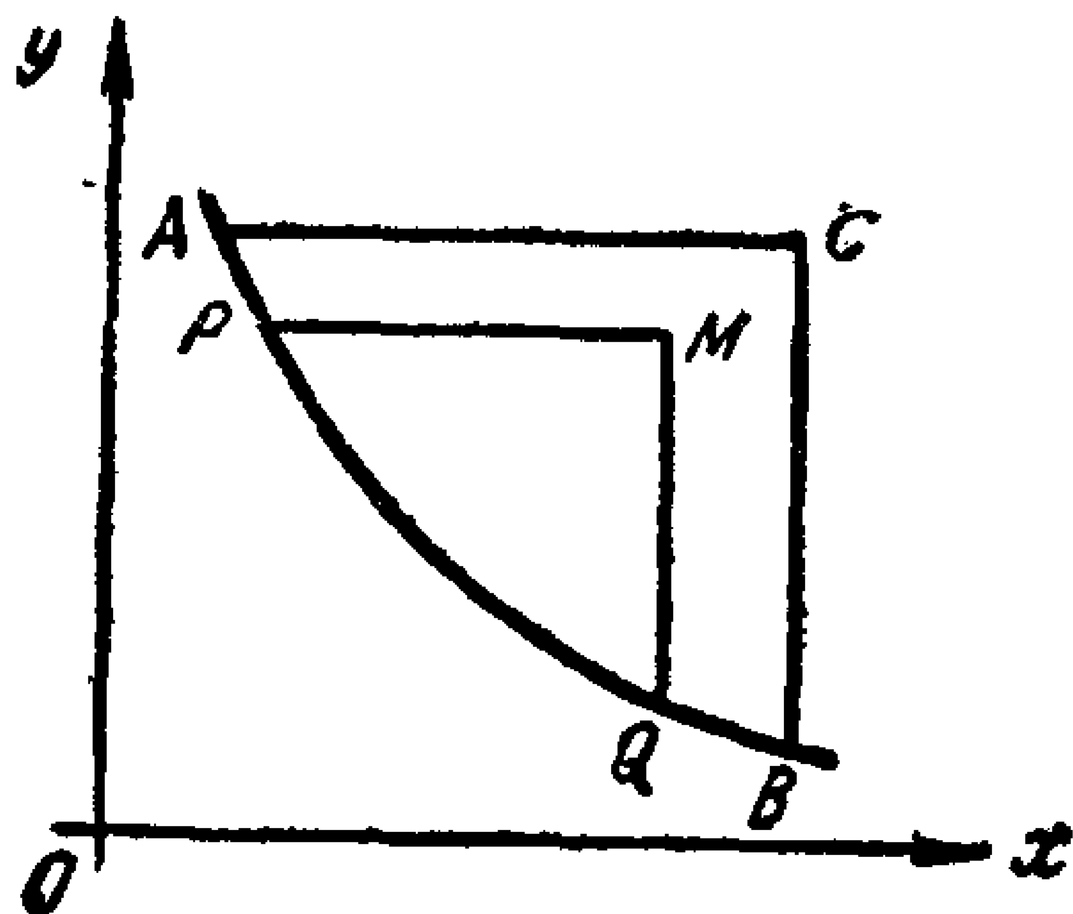


图 1

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y),$$

而且沿 AB u, $u_x = p$, $u_y = q$ 取已知的连续值. 不失一般性,可认为这些值恒等于零(见[9], 第二卷,第V章 §5),如所周知,解这个 Cauchy 问题还原成解非线性积分方程

$$u(x,y) = \iint_{MPQ} f(\xi,\eta,u(\xi,\eta),u_x(\xi,\eta),u_y(\xi,\eta))d\xi d\eta.$$

我们考虑在闭曲边三角形 $\overline{ABC}$ 上连续而且具有连续一阶偏导数的函数 $u(x,y)$ 所组成的空间 X. 距离由公式

$$\begin{aligned}\rho(u, v) = \max_{\overline{ABC}}|u(x, y) - v(x, y)| \\ + \max_{\overline{ABC}}|u_x(x, y) - v_x(x, y)| \\ + \max_{\overline{ABC}}|u_y(x, y) - v_y(x, y)|.\end{aligned}$$

容易验证，对这样定义的距离 X 是一个完备距离空间. 在这个空间内的收敛是函数序列及其导数序列在 $\overline{ABC}$ 上一致收敛于极限函数及其导数.

我们设在自变量 x, y, u, p, q 的空间内当点 $M(x,y)$ 不超出 $\overline{ABC}$ 且对某一常数 a, $|u| \leqslant a$, $|p| \leqslant a$, $|q| \leqslant a$ 时，函数 $f(x, y, u, p, q)$ 关于它的变量的全体连续而且关于变量 u, p, q 满足 Lipschitz 条件:

$$\begin{aligned}|f(x, y, u, p, q) - f(x, y, \tilde{u}, \tilde{p}, \tilde{q})| \\ \leqslant L\{|u - \tilde{u}| + |p - \tilde{p}| + |q - \tilde{q}|\},\end{aligned}$$

其中 L 为某一常数.

特别，由此可知 $f(x, y, u, p, q)$ 在所论及的区域内是有界的.

今在空间 X 内引入算子

$$v(x, y) = U(u) = \iint_{MPQ} f(\xi, \eta, u, u_x, u_y)d\xi d\eta.$$

注意

$$v_x(x,y)=\int_{QM} f(x,\eta,u,u_x,u_y)d\eta,$$

$$v_y(x,y)=\int_{PM} f(\xi,y,u,u_x,u_y)d\xi,$$

我们得

$$|v(x,y)|\leqslant Kd^2,\quad |v_x(x,y)|\leqslant Kd,\quad |v_y(x_y)|\leqslant Kd,$$

其中 $K=\sup|f(x,y,u,p,q)|$

对 $M(x,y)\in\overline{ABC}$，和 $|u|\leqslant a$，$|p|\leqslant a$，$|q|\leqslant a$，且 d 是距离 AC 和 BC 中最长的一个. 如果设关系

$$Kd^2\leqslant\frac{a}{3}\quad 和\quad Kd\leqslant\frac{a}{3}$$

成立，那么算子 U 映空间 X 的闭球 $\bar{S}(\theta,a)$ 于其自身，在此 $\theta(x,y)$ 是恒等于零的函数. 此处我们有

$$\begin{aligned}
&\max_{ABC}|v-\tilde{v}|\\
&\leqslant\max_{ABC}\iint_{MPQ}|f(\xi,\eta,u,u_x,u_y)-f(\xi,\eta,\tilde{u},\tilde{u}_x,\tilde{u}_y)|d\xi d\eta\\
&\leqslant\max_{ABC}\iint_{MPQ}L\{|u-\tilde{u}|+|u_x-\tilde{u}_x|+|u_y-\tilde{u}_y|\}d\xi d\eta\\
&\leqslant Ld^2\rho(u,\tilde{u}).
\end{aligned}$$

同理，

$$\max|v_x-\tilde{v}_x|\leqslant Ld\rho(u,\tilde{u})$$

$$\max|v_y-\tilde{v}_y|\leqslant Ld\rho(u,\tilde{u}).$$

如果我们设 $Ld^2<\dfrac{1}{3}$ 且 $Ld<\dfrac{1}{3}$，特别是如果设 d 充分小，那么算子 U 实现了球 $\bar{S}(0,a)$ 到其自身的压缩映象. 由此得出如下定理.

定理 3 设给定光滑曲线 AB 使得平行于坐标轴的任一直线与之最多交于一点. 又设给定方程

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y), \tag{7}$$

右边的函数 f 在区域 $M(x, y) \in \overline{ABC}$, $|u| \leqslant a$, $|u_x| \leqslant a$, $|u_y| \leqslant a$ 连续而且关于 x 和 y 一致地对 u, u_x, u_y 满足 Lipschitz 条件.

那么如果三角形 $\overline{ABC}$ 充分小,则在其内存在方程(7)的解且此解随其一阶导在 AB 上为零.

利用压缩映象原理还可以导出另外的许多结果，其中的一些将在以后谈到. 这个原理是不动点原理这一理论中最简单的. 当我们研究了距离空间内的紧集时，我们将遇到由 J. Schauder 发现的另外的不动点原理(见[23]).

§8 可分空间

空间 X 称为可分的，如果在此空间内存在一个可数稠密集的话. 换句话说,如果在空间 X 内存在一个序列

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots \tag{1}$$

使得对任一 $x \in X$ 总存在(1)的子序列 $x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdots$ 收敛于 x.

设 X 是距离空间，那么可分性的定义可叙述如下：在空间 X 内存在一个序列(1)使得对任意 $\varepsilon > 0$ 和任一 $x \in X$, 在(1)中存在元 x_{n_0} 使 $\rho(x, x_{n_0}) < \varepsilon$.

***n* 维欧氏空间 E_n 可分** 事实上空间 E_n 内具有有理数坐标的所有点的集 E_n^0 是可数的而且在 E_n 内稠密的.

$C[0,1]$ 空间可分 在空间 $C[0, 1]$ 内考虑具有有理系数的所有多项式的集 C_0, C_0 是可数的. 容易验证 C_0 在 $C[0,$

1]内稠密．事实上，任取 $x(t)\in C[0,1]$．由 Weierstrass 定理存在多项式 $p(t)$ 使

$$\max_t |x(t)-p(t)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

式中 $\varepsilon>0$ 是预先给定的．但在另一方面显然可以找到另一个具有有理系数的多项式 $p_0(t)$ 使

$$\max_t |p(t)-p_0(t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由此 $$\rho(x,p_0)=\max_t |x(t)-p_0(t)|<\varepsilon,$$

这就是所要证明的．

l_p 空间可分 设 E_0 是形如 $\{r_1, r_2, \cdots, r_n, 0, 0, \cdots\}$ 的所有元的集，其中 r_i 是任意有理数，n 是任意自然数．E_0 可数．今易证 E_0 在 l_p 内稠密．事实上，任给 $x=\{\xi_i\}\in l_p$．任给 $\varepsilon>0$，可定自然数 n 使

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_K|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

其次再选 $x_0=\{r_1, r_2, \cdots, r_n, 0, 0, \cdots\}$ 使

$$\sum_{k=1}^{n} |\xi_K - r_k|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

由此得出

$$[\rho(x, x_0)]^p = \sum_{k=1}^{n} |\xi_K - r_k|^p + \sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_K|^p$$

$$< \frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} = \varepsilon^p.$$

从而 $$\rho(x, x_0) < \varepsilon,$$

得所欲证．

空间 $L_p[0, 1]$ 可分 事实上，由 Lebesgue 积分的绝对连续性(见[21])可知空间 $L_p[0,1]$ 内任一函数 $x(t)$ 都是由

下述条件

$$x_n(t)=\begin{cases} x(t) & 若 \quad |x(t)|\leqslant n \\ 0 & 若 \quad |x(t)|>n \end{cases}$$

定义的有界可测函数列 $x_n(t)$ 的 p 次幂平均极限. 此外再由 Лузин 证明的可测函数的 C 性质（见[21]）. 即知任一有界可测函数是连续函数列的 p 幂平均极限. 另一方面，其有理系数的多项式的可数集在 $C[0,1]$ 空间的距离的意义下在 $C[0,1]$ 中稠密，从而也在空间 $L_p[0,1]$的距离意义下稠密. 结果，这样的多项式的全体在 $L_p[0,1]$ 中稠密，所以 $L_p[0,1]$ 可分.

S空间可分 设 E_0 是形如 $\{r_1, r_2, \cdots, r_n, 0, 0, \cdots\}$ 的所有集，其中 r_i 是任意有理数，n 是任意自然数. E_0 可数. 今证在 E_0 内可选取子序列收敛于任一给定的元

$$x=\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots\}\in S.$$

今对每一 ξ_n 可以构造一个有理数列 $\{r_n^{(k)}\}$, $k=1, 2, \cdots$, 对 $k\to\infty$时收敛于 ξ_n. 考虑 E_0 内的元列 $\{x^{(k)}\}$，其中

$$x^{(k)}=\{r_1^{(k)}, r_2^{(k)}, \cdots r_k^{(k)}, 0, 0, \cdots\}$$

容易验证 $x^{(k)}\to x$ 对 $k\to\infty$. 事实上，为了证明这一论断只须指出 $x^{(k)}$ 的第 n 分量当 $n\to\infty$ 时收敛于 x 的第 n 分量. 但这是显然的，因为若取充分大的 $k>n$，我们将有

$$|\xi_n-r_n^{(k)}|<\varepsilon.$$

空间 m 不可分 考虑m的元 $x=\{\xi_i\}$ 集，其中 $\xi_i=0$ 或 1. 这些元的集具有连续统的势. 由此集内取两个不同的元 $x=\{\xi_i\}$ 和 $y=\{\eta_i\}$. 那么 $\rho(x, y)=\sup\limits_i|\xi_i-\eta_i|=1$，因此我们有不可数个元而两两之间的距离为一. 由此可以断定 m 是不可分的.

事实上，如果在m内存在可数稠密集 E_0. 以 E_0 的每一

元为中心作一半径为 $\varepsilon=\frac{1}{3}$ 的球．那么空间m的所有元将全部落在这些球内．因为这些球是可数的，所以在上面考虑的不可数集中至少有两个不同的元 x 和 y 落在同一球内．设此球的中心为 x_0,那么

$$1=\rho(x, y)\leqslant\rho(x, x_0)+\rho(x_0, y)\leqslant\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3},$$

这是不可能的．从而m不可分．但是可以证明，作为空间m的子空间 c 是可分的．

第二章　线性赋范空间

§1　线　性　空　间

在许多具体空间的讨论中，我们将看到这些空间的元（函数，数列以及其它）彼此相加后以及乘以常数后仍是同一空间的一个元．由这些具体例子出发，我们导致线性空间的一般定义．

定义　设 E 是某些类型的元的集，且设 E 满足下述公理：

I. E 关于群运算是一个 Abel 群．

这就是说，对任两元 x、$y\in E$ 定义了它们的和 $x+y$ 而且也是同一集 E 的元．此外加法运算满足条件：

1）$x+y=y+x$（可换性），

2）$x+(y+z)=(x+y)+z$（结合性），

3）存在唯一确定的元 0 使得

$$x+0=x$$

对 E 内任一 x 成立，

4）对每一元 $x\in E$ 存在同空间内唯一确定的元 $(-x)$ 使得

$$x+(-x)=0.$$

我们用 $x-y$ 代替 $x+(-y)$．

元 0 称群 E 的零元或零，元 $-x$ 称为 x 的负元．

II. 定义了 E 的元 $x, y, z, \cdots$ 与实(复)数 $\lambda, \mu, \nu, \cdots$ 的乘法．而且 λx 也是集合 E 的元并满足条件：

1) $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$ (乘法结合律),

2) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$, $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$ (两个分配律),

3) $1\cdot x=x$.

满足公理 I 和 II 的集合 E 称线性空间或矢量空间.

随着用以作乘法的数元为实数或复数,我们依次称 E 为实空间或复空间[1].

例 1. n 维实矢量的全体 E_n 构成一个实线空间.

例 2. n 阶齐次线性常微分方程的复值解的全体构成一个复线性空间.

例 3. 实(复)空间 $C[0,1]$, $L_p[0,1]$ 的元的全体构成一个实(复)线性空间.

例 4. 实(复)空间 m, c, l_p 的元的全体构成一个实(复)线性空间,这时元 $x=\{\xi_i\}$ 与 $y=\{\eta_i\}$ 的和,有如通常,是指元

$$x+y=\{\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\cdots,\xi_n+\eta_n,\cdots\},$$

元 x 与数 λ 的积是指元

$$\lambda x=\{\lambda\xi_1,\lambda\xi_2,\cdots,\lambda\xi_n,\cdots\}.$$

现在我们由线性空间的公理得出一些简单的推论.

1. $0\cdot x=0$[2]. 事实上

$$x=1\cdot x=(1+0)x=1\cdot x+0\cdot x=x+0\cdot x.$$

由此

$$x+(-x)=x+0\cdot x+(-x)$$

或
$$0=0+0\cdot x=0\cdot x.$$

---

1) 在第 13 页,空间一语是另外的意思. 但是在以后我们讨论的所有线性空间都将引入序列极限概念.

2) 我们用记号 0 既代表数零也代表线性空间的零元. 但由所论及的内容不难看出我们所用的记号指的是什么意思.

2. $(-1)x = -x$，因为

$$(-1)x + x = (-1+1)x = 0x = 0.$$

3. $\lambda \cdot 0 = 0$，因为

$$\lambda \cdot 0 = \lambda[x + 1 - x] = \lambda x + \lambda(-x)$$
$$= \lambda x + (-\lambda)x = \lambda x - \lambda x = 0.$$

4. 若 $\lambda x = \mu x$ 且 $x \neq 0$，那么 $\lambda = \mu$. 事实上，若 $\lambda x = \mu x$，则 $\lambda x - \mu x = 0$，或 $(\lambda - \mu)x = 0$. 由此，如果设 $\lambda \neq \mu$，那么

$$x = \frac{1}{\lambda - \mu} \cdot (\lambda - \mu)x = \frac{1}{\lambda - \mu} 0 = 0,$$

这是矛盾.

顺便提一下，若 E 是线性空间，那么加法的可换性是其余公理的推论. 事实上

$$\begin{aligned}(x + y) - (y + x) &= (x + y) + (-1)(y + x)\\ &= x + y + (-1)y + (-1)x\\ &= x + [y + (-y)] + (-1)x\\ &= x + 0 + (-1)x\\ &= x + (-1)x = 0.\end{aligned}$$

最后我们说两个线性空间 E 和 E' 是**同构的**，如果在 E 和 E' 的元之间可建立一个到上的一一对应而且这个对应保持代数运算，即是说，如果

$$x \longleftrightarrow x' \text{ 且 } y \longleftrightarrow y',$$

那么 $\quad x + y \longleftrightarrow x' + y'$，且 $\lambda x \longleftrightarrow \lambda x'$.

在线性空间中可以引入元的线性相关和线性无关的概念. 线性空间的元

$$x_1, x_2, \cdots, x_n$$

称为**线性无关的**，如果由等式

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$$

得出 $$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

反之，如果存在不全为零的数
$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$$
使 $$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0,$$
那么元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 称为**线性相关的**.

在线性相关的情形，如设 $\lambda_n \neq 0$，那么
$$x_n = -\frac{\lambda_1}{\lambda_n} x_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_n} x_2 - \cdots - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} x_{n-1},$$
或者令 $-\dfrac{\lambda_i}{\lambda_n} = \alpha_i$,
$$x_n = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{n-1} x_{n-1}.$$
在这个情形下我们说元 x_n 是元 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 的**线性组合**.

线性流形 线性空间 E 的一个非空子集 L 称为一个**线性流形**，如果 L 的任意有限个元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的任一线性组合
$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$$
都含于 L.

注意，每一线性流形都含有 0 元. 事实上，因为 L 非空，所以它含有某一元 x. L 既然为线性流形，所以它含
$$-x = (-1)x$$
从而也含 $$x + (-x) = 0.$$

现在考虑线性空间的 k 个固定元 $x_1, x_2, \cdots, x_k$. 所有可能的和 $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$ 显然构成 E 内某一线性流形 L_0. 事实上，若元 y_j 具有
$$y_j = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^j x_i,$$

的形式，那么这些元的任一线性组合由等式

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_n y_n = \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i$$

可知也是 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 的线性组合．这样构造的线性流形 L_0 显然是含元 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 的最小线性流形(所谓最小是指任一个含有元 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 的线性流形 L 都含 L_0)．

含有有限个元的最小线性流形的定义显然可以推广到含无穷个，例如含可数个元的情形．事实上，设给定 E 的元 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ 的可数集．含有这些元的**最小线性流形** L_0 是指形如 $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$ 的所有可能的和所成的集，在此不仅 λ_i 是任意数而且 k 也可以取任意自然数．含有已知元的最小线性流形也称为**由已知元所产生的线性流形**或称已知元的**线性包**．

如果空间 E 的线性流形 L 由有限个元所产生，那么 L 称为**有限维的**．设 L 由元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 所产生且这些元线性无关，那么 n 就称为线性流形 L 的**维数**．在此情形下，元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的全体称为 L 的一个基[1]．如果元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 线性相关，那么这个流形的**维数**是指 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中线性无关元的最大数．

换句话说，线性流形 L 称为 n **维的**，如果在 L 内存在 n 个线性无关的元而且 L 的每$(n+1)$个元均线性相关．

如果在空间 E(或线性流形 L)内，对任意自然数 n，总存在 n 个线性无关的元，那么空间 E(或线性流形 L)称为**无穷维的**．例如，我们不难看出空间 $C[0, 1]$ 是无穷维的．

---

1) 某些无穷维空间的基的定义将在以后给出．

直和 现在我们引入把一个线性空间分解为两个或 n 个线性流形的直和这一概念. 设 E 是一线性空间, $L_1, L_2, \cdots, L_n$ 是含于它的线性流形. 如果 E 的每一元 x 都可以唯一地表为

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \quad x_i \in L_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{1}$$

的形式,即是说在每一 L_i 内存在唯一元 x_i 使(1)成立时, 我们就说 E 是线性流形 $L_1, L_2, \cdots, L_n$ 的**直和**,且(1)式称为**元** x **依** $L_1, L_2, \cdots, L_n$ **的元的直和分解**.

在此情形下,我们把空间 E 记成

$$E = \sum_{i=1}^{n} \oplus L_i.$$

不难验证,如果

$$E = \sum_{i=1}^{n} \oplus L_i, \quad 且 \quad L_i = \sum_{k=1}^{m_i} \oplus L_k^{(i)},$$

那么

$$E = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_i} \oplus L_k^{(i)}.$$

事实上,每一元 $x \in E$ 可表为

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} (x_1^{(i)} + x_2^{(i)} + \cdots + x_{m_i}^{(i)}),$$

$$x_i \in L_i, \quad x_k^{(i)} \in L_k^{(i)},$$

而且这个表现是唯一的. 因为若

$$x = \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i = \sum_{i=1}^{n} (\tilde{x}_1^{(i)} + \tilde{x}_2^{(i)} + \cdots + \tilde{x}_{m_i}^{(i)})$$

为 x 的另一表现,那么由元 $x \in E$ 关于线性流形 $L_1, L_2, \cdots, L_n$ 的元的分解的唯一性我们有

$$\begin{aligned} x_i &= x_i^{(1)} + x_2^{(i)} + \cdots + x_{m_i}^{(i)} \\ &= \tilde{x}_1^{(i)} + \tilde{x}_2^{(i)} + \cdots + \tilde{x}_{m_i}^{(i)} = \tilde{x}_i. \end{aligned}$$

再由元 $x_i \in L_i$ 关于线性流形 $L_1^{(i)}, L_2^{(i)}, \cdots, L_{m_i}^{(i)}$ 的元的分

解的唯一性，所以也有

$$x_k^{(i)} = \tilde{x}_k^{(i)},\ i = 1, 2, \cdots, n,\ k = 1, 2, \cdots, m_i.$$

不难证明，如果 $E = L_1 \oplus L_2$，那么 L_1 及 L_2 仅有空间的零元相共通．事实上，如果 L_1 和 L_2 含有另外的公共元 u，那么对元 $x \in E$ 除了有表达式

$$x = y + z,\quad y \in L_1,\quad z \in L_2,$$

之外，还可以表成

$$x = (y - u) + (z + u),\ y - u \in L_1,\ z + u \in L_2,$$

而异于第一表示法，这显然是不可能的．

反之，如果任一元 $x \in E$ 可表为

$$x = y + z,\quad y \in L_1,\quad z \in L_2 \tag{2}$$

且 $L_1 \cap L_2 = 0$，那么 $E = L_1 \oplus L_2$．

为了证明这一论断，只要建立表达式(2)的唯一性即可．但若

$$x = y + z = \tilde{y} + \tilde{z},\ y, \tilde{y} \in L_1,\ z, \tilde{z} \in L_2,$$

则 $\quad y - \tilde{y} = \tilde{z} - z,\quad y - \tilde{y} \in L_1,\quad \tilde{z} - z \in L_2.$

由所给的假设可得

$$y - \tilde{y} = \tilde{z} - z = 0,\quad 即\quad y = \tilde{y},\quad z = \tilde{z},$$

这就是所要证明的．

在某些情形下考虑两个或数个空间的直和是有用的．

设 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 为线性空间．考虑这些空间的元的所有有序组 $x = (x_1, \cdots, x_n)$，$x_i \in E_i$，$i = 1, 2, \cdots, n$．设给定 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 和数 λ，我们令

$$x + y = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ \cdots,\ x_n + y_n),$$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n).$$

容易验证对这样定义的加法运算以及数乘法，线性空间的公理被满足．因此这样的有序组的集 X 是线性空间．

如果所有 E_i 为距离空间，那么也可使 X 成为距离空间，例如令

$$\rho(x, y) = \max_i \rho(x_i, y_i)$$

或

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \rho^2(x_i, y_i)},$$

其中 $\rho(x_i, y_i)$ 代表空间 E_i 的点 x_i 和 y_i 的距离.

由空间 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 的完备性可得出 X 的完备性. 这个证明留给读者.

例. 设对任一 i, E_i 为数直线，那么 $\sum_{i=1}^{n} \oplus E_i$ 依上述第二种方法赋以距离为 n 维欧氏空间*⁾.

商空间 考虑线性空间 E 以及含于它的某一个线性流形 L_0. 空间 E 作为对加法运算的群可以依子群 L_0 分解为剩余类. 即是说空间 E 可分解为形如 $x + L_0$ (即形如 $x + y$, $y \in L_0$ 的元的全体)的集，其中 $x \in E$. 令 $L = x + L_0$，那么可知 $x_1, x_2 \in L$ 当且仅当 $x_1 - x_2 \in L_0$. 对固定的 $x \in E$，我们称 L 为一个剩余类.

若 $x_0 \in L$，那么 L 的另外每一元总可以写成 $x = x_0 + x'$，其中 $x' \in L_0$. 因此可以说 L 是线性流形 L_0 经过平移到 x_0 而得的.

令 E/L_0 代表所有类 L 所成的商群. 而 L 是由 L_0 经过平移而得的剩余类.

在 E/L_0 内加法运算定义如下. 设 L_1 和 L_2，那么和

---

*⁾ 因 $X = \{(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n)\}$，其中 $x_i \in E_i$. 令 $L_i = \{(0, 0, \cdots, x_i, 0, \cdots, 0)\} \subset X$. 则 L_i 作为 X 的流形与 E_i 同构，故 $X = \sum_{i=1}^{n} \oplus E_i$.——译者注

L_1+L_2 是指由所有和 x_1+x_2，所构成的剩余类，其中 $x_1\in L_1$，$x_2\in L_2$．但我们必须证明 L_1+L_2 确实是一个剩余类．因为若 x_1+x_2，和 $x_1'+x_2'$ 是这个集 L_1+L_2 的两个元那么

$$(x_1+x_2)-(x_1'+x_2')=(x_1-x_1')+(x_2-x_2')$$
$$=x_0+y_0\in L_0,$$

这是因为 x_0，$y_0\in L_0$ 且 L_0 是线性流形之故．由此可知 $L_1+L_2\subset L$，式中 L 代表某一剩余类．今若 y 是这个类的任一元，那么取含于 L 的元 x_1+x_2（这是可能的，因为 $L\supset L_1+L_2$）我们将有

$$y-(x_1+x_2)=x_0\in L_0,$$

从而
$$y=(x_1+x_2)+x_0=x_1+\tilde{x}_2,$$

其中 $x_1\in L_1$，$\tilde{x}_2=x_2+x_0\in L_2$，因此 $L\subset L_1+L_2$，从而 $L_1+L_2=L$．

同理可证，形如 λx $x\in L$，$\lambda\neq 0$ 的元的全体 λL 也是一个剩余类．再依定义令 $0\cdot L=L_0$ 对任一 $L\in E/L_0$．不难验证 E/L_0 满足线性空间的所有公理．这时 L_0 是空间 E/L_0 的零元．再注意一下，若 $L\in E/L_0$ 含空间 E 的零元 0，那么 L 与 L_0 重合，因为在这个情形下任一元 $x\in L$ 有如下形式

$$x=0+x_0=x_0\in L_0.$$

而反之也成立．

空间 E/L_0 称为 E 关于 L_0 的**商空间**．

例．在 $C[0,1]$ 内考虑在 $t=\frac{1}{2}$ 点为零的所有连续函数所成的流形 C_0．今证对应的商空间同构于实直线．

事实上，设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 属于关于 C_0 的同一剩余类．即 $x\left(\frac{1}{2}\right)-y\left(\frac{1}{2}\right)=0$ 或 $x\left(\frac{1}{2}\right)=y\left(\frac{1}{2}\right)$．这就是说在同一剩余类的函数在 $t=\frac{1}{2}$ 有同一值，在每一剩余类内取代表元

$x(t)=\text{const}$，我们得出常数的集与剩余类的集成一一对应．不难验证这个对应也是一个同构．

可以证明，如果 $E=E_1\oplus E_2$，那么 E/E_1 与 E_2 同构．

实空间与复空间关系 对复数来说，除去代数运算外取共轭运算

$$\overline{a+ib}=a-ib$$

也是十分重要的．

因此我们自然地在复空间定义相似的运算——对合．

对合是指定义在复线性空间的所有元 $x,y,z,\cdots$ 上的一个运算，它使 E 的元 $x,y,z,\cdots$ 依次与 $\bar{x},\bar{y},\bar{z},\cdots$ 成对应且满足

1) $\overline{x+y}=\bar{x}+\bar{y}$，

2) $\overline{\lambda x}=\bar{\lambda}\,\bar{x}$（$\lambda$ 为复因子）；

3) $\overline{(\bar{x})}=\bar{\bar{x}}=x$[1]．

如果 E 的元 $x\in E$ 满足 $\bar{x}=x$，我们就称它为**实元**．如果 $\bar{x}=-x$，我们就称 x 为**纯虚元**．显然，如果 x 为实元，那么 ix 为纯虚元．又若 y 为纯虚元，那么 $\frac{1}{i}y$ 为实元．因此纯虚元 y 的全体与形如 ix 的元的全体重合，其中 x 为实元．

任一元 $x\in E$ 可唯一地表为 $x=u+iv$ 的形式，其中 u 和 v 为实元．

事实上，令 $u=\frac{x+\bar{x}}{2}$，$v=\frac{x-\bar{x}}{2i}$，则 $u+iv=x$，而且

$$\bar{u}=\frac{1}{2}\overline{(x+\bar{x})}=\frac{1}{2}(\bar{x}+\bar{\bar{x}})=\frac{1}{2}(\bar{x}+x)=u,$$

---

1) 若在 E 内定义了元列的收敛概念，那么我们也引入补充要求：

4) 由 $x_n\to x$ 有 $\bar{x}_n\to\bar{x}$，即对合是连续的．

$$\bar{v} = -\frac{1}{2i}\overline{(x - \bar{x})} = -\frac{1}{2i}(\bar{x} - \bar{\bar{x}}) = \frac{1}{2i}(x - \bar{x}) = v,$$

即 u 和 v 为实元.

又元 $x \in E$ 的表现 $x = u + iv$ 是唯一的,即是说,若

$$x = u + iv = t + is, \tag{3}$$

那么 $t = u,\ s = v$.

事实上,由(3)可知 $u - t = i(s - v)$,其中 u, v, t, s 为实元. 此外

$$\overline{u - t} = \bar{u} - \bar{t} = u - t,$$

$$\overline{i(s - v)} = \bar{i}(\bar{s} - \bar{v}) = -i(s - v).$$

因此
$$u - t = i(s - v)$$
即
$$i(s - v) = -i(s - v)$$
从而
$$s - v = 0,\ s = v.$$
由此也有 $u - t = 0$ 即 $u = t$.

以上我们证明了空间 E 是两个实线性空间的直和. 因而在许多问题中研究复空间还原成研究实空间.

注意 n 维复空间是 $2n$ 维实空间.

在以后当我们谈到线性空间时, 若不作特别声明时都指的是实线性空间.

§2 线性赋范空间

定义 如果一个线性空间同时也是一个距离空间, 那么我们称它为线性距离空间[*]. 一类重要的线性距离空间是 B (Banach) 空间.

集 E 称为一个线性赋范空间,如果

---

[*] 也要求空间的线性运算关于距离所导出的收敛是连续的. ——译者注

1. E是一个实(复)线性空间.

2. 对空间E的每一元x有一实数与之对应，此实数称为元x的范数并记作$\|x\|$. 此外并设元的范数满足下述条件(范数公理):

1) $\|x\| \geqslant 0$, 且 $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$,

2) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (三角公理),

3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

在线性赋范空间可以借等式

$$\rho(x, y) = \|x - y\|$$

引入距离. 不难验证，这样定义的$\rho(x, y)$确满足距离公理. 引入距离以后可以定义元列$\{x_n\}$收敛于元x的概念，即是说

$$x = \lim x_n$$

或 $x_n \to x$ 是指 $\|x_n - x\| \to 0$ 当 $n \to \infty$. 这样在线性赋范空间内定义的收敛称为依范数收敛.

如果线性赋范空间在依范数收敛的意义下是完备的，那么就称它为 Banach 空间或B空间.

例1. n维矢量空间可使之成为B空间. 事实上定义它的元的加法以及数乘法有如通常，并用等式

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

定义范数，那么E_n是一B空间，而且由此范数在E_n引入的距离即前面对E_n引入的距离.

例2. $C[0, 1]$是一B型空间. 函数的加法以及数乘法有如通常. 此外再令

$$\|x\| = \max_t |x(t)|.$$

由它得出的距离和以前的一致.

例3. l_p是一B空间. 事实上，元素的加法以及数乘法

有如例1(见51页),且令

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

这个B空间内的距离也和以前引入的一样.

例 4. $L_p[0, 1]$ 是B空间. 这时对 $x(t) \in L_p[0, 1]$ 令

$$\|x\| = \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

这个B空间的距离和以前在 $L_p[0, 1]$ 内所引入的一致*)

例 5. m是B空间. 事实上,对 $x = \{\xi_i\}$ 令$\|x\| = \sup\limits_i |\xi_i|$,我们得出一个$B$空间,它的距离和以前对$m$引入的距离一致.

例 6. $\widetilde{M}[0,1]$ 是B空间. 事实上,对$[0,1]$上有界可测函数$x(t)$可令

$$\|x\| = \text{vrai max}|x(t)|.$$

例 7. 考虑在$[0,1]$上定义的具有直到k阶连续导数的连续函数$x(t)$的全体. 在这个空间内引入范数

$$\|x\| = \max\{\max_t |x(t)|, \max_t |x'(t)|, \cdots, \max_t |x^{(k)}(t)|\}.$$

这样得出的B空间记作 $C^k[0, 1]$. 这个空间在变分学中有广泛的应用.

由关系式

$$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| \leqslant \|x_n - x\| + \|y_n - y\|,$$

$$\|\lambda_n x_n - \lambda x\| \leqslant |\lambda_n| \|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda| \|x\|,$$

可知当 $x_n \to x$, $y_n \to y$, $\lambda_n \to \lambda$ 时,

$$x_n + y_n \to x + y, \quad \lambda_n x_n \to \lambda x.$$

---

*) 在这个空间内任两个殆遍相等的函数必须看做代表 $L_p[0, 1]$ 的同一元. 否则 $\|x(t)\| = 0$ 不能保证 $x(t) \equiv 0$.——译者注

此外　　$\|x\| = \|y + (x - y)\| \leqslant \|y\| + \|x - y\|$,

或　　$$\|x\| - \|y\| \leqslant \|x - y\|.$$

交换 x 和 y 可得

$$\|y\| - \|x\| \leqslant \|x - y\|,$$

从而　　$$|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|.$$

由此可知,若 $x_n \to x$, 那么

$$\|x_n\| \to \|x\|.$$

故$\{\|x_n\|\}$也是有界数列.

因为线性赋范空间是距离空间,所以对这样的空间来说,以前我们对距离空间引入的所有概念(球, 有界集, 可分性等)都是有意义的,而且对这些空间证明的所有定理仍是有效的.

对 B 空间来说, 以前对完备距离空间证明的所有结果仍然有效.

线性空间 E 内形如

$$y = tx, \ x \in E, \ x \neq 0, \ -\infty < t < +\infty$$

称为由已知元 x 定义的直线,又形如

$$y = (1 - t)x_1 + tx_2, \ x_1, x_2 \in E, \ 0 \leqslant t \leqslant 1$$

的元的集称为连结点 x_1 和 x_2 的线段. 空间 E 的集 K 称为一个凸集,如果联结 K 的任两点的线段都完全含于 K.

设 M 是线性空间 E 的某一集. 对固定的 $a \in E$, 形如 $x + a$, $x \in M$ 的元的全体称为 M 的平移并记作 $M + a$. 不难验证,若 K 是凸集,那么它的平移也是凸集.

容易看出,在线性赋范空间内球(闭球)是凸集. 事实上,设 $x_1 x_2 \in S(a, r)$, 即是说

$$\|x_1 - a\| < r, \quad \|x_2 - a\| < r.$$

任取形如

$$y = (1 - t)x_1 + tx_2 \quad 0 < t < 1,$$

那么　$\|y - a\| = \|(1 - t)x_1 + tx_2 - a\|$

$$
\begin{aligned}
&= \|(1-t)x_1 + tx_2 - (1-t)a - ta\| \\
&\leqslant \|(1-t)(x_1 - a)\| + \|t(x_2 - a)\| \\
&= (1-t)\|x_1 - a\| + t\|x_2 - a\| \\
&< (1-t)r + tr = r.
\end{aligned}
$$

因此
$$\|y - a\| < r,$$
这就是说 $y \in S(a,r)$.

我们提一下 Banach 空间内的球的两个显然的性质:对任一点 $x \neq 0$. 以原点作中心且半径 $r > \|x\|$ 的球含有此点,但以原点作中心而半径 $r' < \|x\|$ 的球则不含 x.

因为线性赋范空间 E 是线性空间的特殊情形,所以对线性空间引入的概念,例如线性相关,线性无关,线性流形,直和分解等对 E 也同样有意义.

设线性赋范空间 E 的线性流形 L 也是闭集,那么 L 称为**子空间**.

如果 L 是线性赋范空间 E 的有限维线性流形,那么我们以后即将看出 L 自然是闭集,即 $\bar{L} = L$. 但对无穷维线性流形来说这个等式不一定成立.

例如设 $E = C[0,1]$, 那么若 L 是由元
$$x_0 = 1,\ x_1 = t,\ \cdots,\ x_n = t^n,\ \cdots$$
组成的,则 L 是所有多项式的全体,但
$$\bar{L} = C[0,1] \neq L.$$
设给定两个线性赋范空间 E_1 和 E_2. 以后我们将说这两个空间是**同构的**. 如果存在一个 E_1 到 E_2 上的代数意义下的同构而且此同构也是一个同胚.

在此有下述重要定理:

定理 **具有已知维数 n 的所有有限维线性赋范空间都同构于 n 维欧氏空间 E_n,从而也彼此同构.**

设 E 是 n 维线性赋范空间且 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是这个空间

的一个基，由此任一 $x\in E$ 可唯一表为

$$x=\xi_1x_1+\xi_2x_2+\cdots+\xi_nx_n,$$

对元 $x\in E$. 令元

$$\bar{x}=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}\in E_n$$

与之对应. 显然，这样在 x 和 $\bar{x}$ 之间建立的对应是一对一的. 此外这个对应也是线性空间 E 到 E_n 上的一个同构. 现在我们来证明这个对应也是双测连续的.

对任一 $x\in E$ 我们有

$$\|x\|=\left\|\sum_{i=1}^{n}\xi_ix_i\right\|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|\,\|x_i\|$$

$$\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\right)^{\frac{1}{2}}=\beta\|\bar{x}\|. \tag{1}$$

特别

$$\|x-y\|\leqslant\beta\|\bar{x}-\bar{y}\|, \tag{2}$$

式中 β 不依赖于 x 和 y.

现在我们来建立相反方向的不等式.

在空间 E_n 的单位球面 S: $\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2=1$ 上考虑函数

$$f(\bar{x})=f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=\|x\|$$
$$=\|\xi_1x_1+\xi_2x_2+\cdots+\xi_nx_n\|.$$

因为在 S 上所有 ξ_i 不能同时为零，而且 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 又线性无关，所以

$$f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)>0.$$

不等式

$$|f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)-f(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)|=|\|x\|-\|y\||$$
$$\leqslant\|x-y\|$$
$$\leqslant\beta\|\bar{x}-\bar{y}\|$$

指出 $f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 是连续函数. 由 Weierstrass 定理可知此函数在 S 上达到极小值 α. 容易看出 $\alpha>0$. 由此对

$\bar{x} \in S$,

$$f(\bar{x}) = \|x\| \geqslant \alpha.$$

从而对任一 $\bar{x} \in E_n$ 有

$$f(\bar{x}) = \|x\| = \|\bar{x}\| \left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{\xi_i x_i}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2}} \right\| \geqslant \alpha \|\bar{x}\|. \qquad (3)$$

由(1)和(3)建立了这个 E 到 E_n 上的代数同构也是一个同胚.定理证毕.

由 E 和 E_n 的同胚可知在有限维 Banach 空间内依赋数的收敛还原为依坐标的收敛，因而这样的空间必然是完备的.

对线性赋范空间的子空间有下述属于 F. Riesz 的重要命题成立.

引理 设 L 是线性赋范空间 E 的一个不与重合的子空间. 那么任给 $\varepsilon > 0$. 在 E 内存在一点 y 具有范数为一，且

$$\|x - y\| > 1 - \varepsilon$$

对所有 $x \in L$.

事实上，设 y_0 是 E 的任一元不含于 L，且令

$$d = \inf_{x \in L} \|y_0 - x\|.$$

那么 $d > 0$，否则 y_0 将是 L 的极限元，而 L 又为闭集，所以 y_0 将含于 L，而依条件这是不可能的. 对任一$\varepsilon > 0$，存在 $x_0 \in L$ 使 $d \leqslant \|y_0 - x_0\| < d + d\varepsilon$. 令

$$y = \frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|},$$

那么 $y \bar{\in} L$ (否则 y_0 将属于 L)且 $\|y\| = 1$. 令对 L 的任一元 x 有

$$\xi = x_0 + \|y_0 - x_0\| x,$$

那么 $$\|y-x\|=\left\|\frac{y_0-x_0}{\|y_0-x_0\|}-x\right\|=\frac{1}{\|y_0-x_0\|}\|y_0-\xi\|$$
$$>\frac{1}{d+d\varepsilon}\|y_0-\xi\|\geqslant\frac{d}{d+d\varepsilon}$$
$$=1-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}>1-\varepsilon,$$
这就是所要证明的*).

现在我们来考虑一下一个线性赋范空间 E 关于它的一个子空间 L_0 的商空间 E/L_0 的赋范性.

E/L_0 容许下述赋范
$$\|L\|=\inf_{x\in L}\|x\|$$
对每一 $L\in E/L_0$.

先证明 $\|L\|$ 满足所有范数公理.

1. 显然 $\|L\|\geqslant 0$. 我们要证 $\|L\|=0$ 当且仅当 $L=L_0$, 其中 L_0 为 E/L_0 的零元. 为此先注意 L 是闭集. 事实上, 设 $\{x_n\}$ 是 L 的一个序列的元且收敛于 $x\in E$. 对任意 n 和 m 有 $x_n-x_m\in L_0$. 对 $m\to\infty$
$$x_n-x_m\to x_n-x.$$
因为 L_0 是闭, 所以 $x_n-x\in L_0$. 这就是说 x 随 x_n 包含在 L 中.

今若
$$\|L\|=\inf_{x\in L}\|x\|=0.$$
那么在 L 内存在序列 $\{x_n\}$ 使 $\|x_n\|\to 0$, 换句话说 $x_n\to 0$. 由于 L 的闭性, 它必须含 0, 但这是说 $L=L_0$. 此外 $\|L_0\|=0$ 是显然的. 这就完全证明了第一公理.

2. 给定 $\varepsilon>0$. 依 $\|L_1\|$ 和 $\|L_2\|$ 定义存在元 $x_1\in L_1$, $x_2\in L_2$ 使得

---

*) 在 L 是有限维子空间的情形, 甚至可以得出更强的结果 $\|y-x\|=1$ 对所有 $x\in L$.——译者注

$$\|x_1\| \leqslant \|L_1\| + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\|x_2\| \leqslant \|L_2\| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

由此

$$\|x_1 + x_2\| \leqslant \|x_1\| + \|x_2\| \leqslant \|L_1\| + \|L_2\| + \varepsilon.$$

但 $\inf\limits_{x \in L_1+L_2} \|x\| \leqslant \inf\limits_{x_1 \in L_1, x_2 \in L_2} \|x_1 + x_2\| \leqslant \|L_1\| + \|L_2\| + \varepsilon$,

所以

$$\|L_1 + L_2\| \leqslant \|L_1\| + \|L_2\| + \varepsilon.$$

ε 既然是任意的,我们得

$$\|L_1 + L_2\| \leqslant \|L_1\| + \|L_2\|.$$

3. $\|\lambda L\| = |\lambda| \|L\|$. 事实上,对 $\lambda \neq 0$,

$$\|\lambda L\| = \inf_{x \in L} \|\lambda x\| = |\lambda| \inf_{x \in L} \|x\| = |\lambda| \|L\|.$$

若 $\lambda = 0$,那么对任意 L,

$$\|\lambda L\| = \|L_0\| = 0 = |\lambda| \|L\|.$$

这就证明范数的第三公理.

最后我们证明,依空间 E/L_0 引入的范数,剩余类列$\{L_n\}$收敛于剩余类 L 的概念等价于存在元列 $\{x_n\}$, $x_n \in L_n$, 使 $x_n \to x$, $x \in L$.

设 $$\|L_n - L\| \to 0,$$

那么令 $\|L_n - L\| = \varepsilon_n$, 则 $\varepsilon_n \to 0$.

于是 $L_n - L$ 含元 $y_n - x$ 使 $y_n \in L_n$, $x \in L$ 且

$$\|y_n - x\| < 2\varepsilon_n.$$

这时作为 x 可选任意固定(不依赖于 n) $x_0 \in L$.

事实上,若

$$\|y_n - x\| < 2\varepsilon_n$$

其中 $y_n \in L_n$, $x \in L$,那么

$$\|(y_n - x + x_0) - x_0\| < 2\varepsilon_n,$$

而且因为 $x_0 \in L$, $x \in L$, 所以

$$x_0 - x \in L_0 \text{ 且 } x_n = y_n - x + x_0 \in L_n.$$

换言之,对 $x_0 \in L$ 我们构造了序列 $\{x_n\}$,$x_n \in L_n$ 使得 $x_n \to x_0$.

反之,设存在序列 $\{x_n\}$, $x_n \in L_n$ 使 $x_n \to x$, $x \in L$. 那么

$$\|L_n - L\| = \inf_{y_n \in L_n, y \in L} \|y_n - y\| \leqslant \|x_n - x\|.$$

所以
$$\|L_n - L\| \to 0$$
如所欲证.

现在不难证明,若 E 是完备空间,那么 E/L_0 也是完备的.

设 $\{L_n\}$ 是空间 E/L_0 内自收敛剩余类列. 今在每一类 L_n 选一元 x_n 使

$$\|x_n - x_m\| < 2\|L_n - L_m\|.$$

这样我们就得出 E 内一个自收敛序列 $\{x_n\}$. 因为 E 是完备的,所以存在元 $x \in E$ 使 $x_n \to x$. 但这时 $L_n \to L$, 其中 L 是含 x 的类,这就证明了空间 E/L_0 的完备性.

最后注意一下,若 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 是线性赋范空间,E 是它们的直和,那么 E 也可赋范. 例如设 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 可令

$$\|x\| = \|x_1\| + \|x_2\| + \cdots + \|x_n\|.$$

也可以证明,若 $E = E_1 \oplus E_2$,那么线性赋范空间 E_1 和 E/E_2 同构.

Banach 空间的元的级数 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 是 Banach 空间 E 的元. 形如 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的表达式称为空间 E 的元

的级数. 我们考虑部分和 $s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$.

如果部分和序列收敛,我们就说级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛.

由于 E 的完备性,所以为了序列 $\{s_n\}$ 收敛只须它是基本列,由此得出级数收敛的一个充分条件: 设 $\|x_n\| \leqslant a_n$ 且数值级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 也收敛. 事实上由下述不等式

$$\|s_{n+p} - s_n\| = \|x_{n+1} + \cdots + x_{n+p}\| \leqslant a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}$$

得所欲证.

§3 线性拓扑空间

线性赋范空间有如上述是线性距离空间的特例. 但线性距离空间又是一类更广泛的所谓线性拓扑空间的特例. 线性拓扑空间近年来广泛地应用于泛函分析, 微分方程论和数学的某些另外分支. 我们在这里仅提一下有关线性拓扑空间的最简单的概念. 关于这些空间的性质的更详细的叙述可参考 [12][1]

集 $X = \{x, y, z, \cdots\}$ 称一个线性拓扑空间,如果它满足下述四个公理:

I. X 是一个拓扑空间, 即是说在 X 内给出了一个子集族 Y, 这族子集的每一个称为开集且满足条件:

1) 空集和全空间是开集,

---

1) 也见专著: N. Bourbaki. E'lements de mathe'matique. Livre. Espaces vectoriels topologiques (Paris, Hermann 1953, 1955).

2）任意个开集的并是开集，

3）有限个开集的交是开集.

含点 $x\in X$ 的任一开集称为点 x 的一个邻域.

集 $M\subset X$ 的点 x 称为此集的一个内点，如果存在 x 的一个邻域 $U(x)$ 也含于 M. 显然开集 G 的每一点都是它的内点，因为在此情形下可取 G 自身作为 $U(x)$. 反之也成立：如果 M 的每一点为内点，那么 M 是开集，这由等式

$$M=\bigcup_{x\in M}U(x)\qquad U(x)\subset M$$

及开集性质 2 立刻得出.

II. X 为 T_1 拓扑空间. 就是说，对空间 X 的任两点 $x\neq y$，存在 x 的邻域不含 y，且存在 y 的邻域不含 x.

利用邻域可按通常方式引入聚点概念：点 $a\in X$ 称为集 $M\subset X$ 的聚点，如果 a 点的任一邻域至少含有 M 的一个异于 a 的点. M 的聚点的全体称 M 的导集并用 M' 表示.

集 $\overline{M}=M\cup M'$ 称为集 M 的闭包，M 称为闭集如果它和它的闭包一致. 可以证明拓扑空间内集的闭包和闭集具有数直线上集的闭包和闭集的许多性质. 例如开集的余集为闭集，在 18 页指出的闭包的性质 1-4 这时也成立. 有限集是闭集，等等.

在拓扑空间内也可以引入序列极限的概念. 就是说，点 $x\in X$ 称为序列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 的极限，如果 x 的任一邻域总含有此序列从某项开始以后的所有项，易证极限唯一*).

III. X 为实线性空间(自然也可考虑复空间，但我们不在此讨论这个情形).

IV. 元的加法运算以及元与实数的乘法运算在此空间内连续. 这就是说

*) 因为 T_1 线性拓扑空间也是 T_2 空间，所以极限唯一. ——译者注

1) 任给两个元 x 和 $y\in X$，以及 $x+y$ 的任一邻域 $U(x+y)$，存在元 x 和 y 的邻域 $U(x),U(y)$ 使

$$U(x)+U(y)\subset U(x+y).$$

(对线性空间的集 A 和 B，$A+B$ 代表 X 内形如 $a+b$ 的元的全体. $a\in A$, $b\in B$).

2) 任给实数 λ 和元 $x\in X$，以及元 λx 的任一邻域 W，存在数 $\delta>0$ 和元 x 的邻域 V 使

$$\alpha V\subset W,$$

对满足不等式

$$|\alpha-\lambda|<\delta$$

的任一 α 成立(记号 αV 代表形如 αy 的元的全体，$y\in V$).

设 x_0 为线性拓扑空间的一个固定元，且 G 为一开集. 那么 x_0+G 也是开集.

任取一点 $y\in x_0+G$，那么

$$y=x_0+x,\quad x\in G.$$

由此
$$y-x_0\in G.$$

既然 G 为开集，所以它当然是 $y-x_0$ 的一个邻域. 由加法的连续性存在点 y 和 $-x_0$ 的邻域 $V(y)$ 和 $W(-x_0)$ 使

$$V(y)+W(-x_0)\subset U(y-x_0)=G.$$

特别
$$V(y)+(-x_0)\subset G,$$

即
$$V(y)\subset G+x_0,$$

因此集 x_0+G 的每一点都有一个邻域而含于它，换句话说 x_0+G 为开集.

同理可证，对任一实数 $\lambda\neq 0$ 和任一开集 G，集 λG 为开集.

由上述的证明可知，如果 $U(x)$ 是线性拓扑空间 X 内的点 x 的邻域，那么 $(-x)+U(x)$ 是 X 内原点的邻域. 反之，若 $V(0)$ 是空间 X 内零元的邻域，那么 $V(0)+x$ 是同空间

内点 x 的邻域. 因此为了给出线性拓扑空间内所有点的所有邻域,就是说定义拓扑空间的所有开集,只须给出零元的所有邻域就够了.

线性空间X的集 A 称为**对称的**,如果由 $x\in A$ 也有 $-x\in A$. 如果U是线性拓扑空间X内零元的一个邻域,那么

$$-U\cap U$$

也是零元的一个邻域而且是对称的.

最后,我们提一下.为了给定空间的拓扑没有必要给出零元的所有邻域,只须给出称为零元的**邻域基本系**或**邻域基**就够了. 所谓邻域基是指这样一系零元的邻域,即对于零元的任何一个邻域 U,总存在邻域基中的一个邻域 V 全部含在 U 中. 一般地说,空间X的两个邻域系 S 和 $\tilde{S}$ 称为**等价的**,如果对任意邻域 $U\in S$ 存在邻域 $\tilde{U}\in\tilde{S}$ 使 $\tilde{U}\subset U$,反之对任意邻域 $\tilde{V}\in\tilde{S}$ 存在邻域 $V\in S$ 使 $V\subset\tilde{V}$. 显然两个等价邻域系在X内产生相同的拓扑.

例 1. 令X代表定义在 $-\infty<t<+\infty$ 内无穷可微且总在一个有限闭区间(随函数而异)外为零的函数的全体. 函数的和与数积定义如常. 作为零元的邻域取如下的集:对任意 $\varepsilon>0$ 和任意 n,零元的邻域 $U(n,\varepsilon)$ 是指所有满足 $|x^k(t)|<\varepsilon$ 对 $k=0,1,2,\cdots,n$ 的函数 $x(t)\in X$.读者不难验证X是一个线性拓扑空间.

2. 线性赋范空间是线性拓扑空间. 零元的邻域是指对给定的 $\varepsilon>0$ 满足 $\|x\|<\varepsilon$ 的 x 的全体.

我们提出这样一个问题. 在什么条件下线性拓扑空间可赋范,即是说在其内可引入这样的范数使得由此得出的线性赋范空间内的零元的邻域的全体和该线性拓扑空间内零元原来的邻域的全体一致.

这个问题的回答由下述 A. H. Колмогоров 的重要定理

给出.

线性拓扑空间的集 A 称为**有界的**，如果对零元的任一邻域 $U(0)$ 存在 $\lambda>0$ 使 $\lambda A\subset U(0)$. 集 A 的有界性等价于条件:

对任一序列 $\{x_n\}\subset A$ 和任一收敛于零的实数列 $\{\lambda_n\}$ 有

$$\lambda_n x_n\to 0.$$

我们略去这个证明. 特别，由此可知若 A 有界，那么 $-A$ 也有界.

定理 A. H. Колмогоров **为使线性拓扑空间 X 可赋范，必须且只须在 X 内存在零元的有界凸邻域.**

设 U 是 X 的一个具上述性质的零元的邻域. 不失一般性可设其为对称的，今对任一 $x\in X$，令

$$\|x\|=\inf_{\lambda>0,\, x\in\lambda U}\lambda.$$

我们证明，这样引入的数 $\|x\|$ 具有范数的所有性质.

首先 $\|0\|=0$，因为 $0\in\lambda U$ 对任意 $\lambda>0$. 设 $x\neq 0$. 那么对某一 n_0，$x\bar{\in}\frac{1}{n_0}U$. 事实上，如果 $x\in\frac{1}{n}U$ 对任意 n，那么

$$y_n=nx\in U\quad 对\ n=1,2,\cdots,$$

因此序列 $\{y_n\}$ 有界，从而 $\frac{1}{n}y_n\to 0$. 但这是不可能的，因为

$$\frac{1}{n}y_n=x\neq 0.$$

由此可知 $x\bar{\in}\frac{1}{n_0}U$，亦即

$$\|x\|\geqslant\frac{1}{n_0}>0.$$

令设 $\|x\|=\alpha$，$\|y\|=\beta$，$x,y\neq 0$，那么 $\left\|\frac{x}{\alpha}\right\|=1$，从

而

$$\frac{x}{\alpha} \in (1+\varepsilon)U$$

对充分小 $\varepsilon > 0$. 同理

$$\frac{y}{\beta} \in (1+\varepsilon)U.$$

由 U,随之 $(1+\varepsilon)U$ 的凸性可得

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot \frac{x}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} \frac{y}{\beta} \in (1+\varepsilon)U,$$

或

$$\frac{x+y}{\alpha+\beta} \in (1+\varepsilon)U.$$

由此

$$x+y \in (\alpha+\beta)(1+\varepsilon)U,$$

亦即

$$\|x+y\| \leqslant (\alpha+\beta)(1+\varepsilon).$$

$\varepsilon > 0$ 是任意的,所以

$$\|x+y\| \leqslant \alpha+\beta = \|x\| + \|y\|.$$

如果 x 或 y 或它们两者为零,那么等式

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$$

是显然的. 这样我们就证明了范数的第二个性质.

由对称性可知,若 $x \in \lambda U$, 那么 $-x \in \lambda U$. 反之也成立. 由此得

$$\|-x\| = \|x\|.$$

我们考虑元 αx, 其中 $\alpha > 0$. 设 $x \in \lambda U$. 那么 $\alpha x \in \alpha\lambda U$. 反之由 $\alpha x \in \alpha\lambda U$ 也有 $x \in \lambda U$. 因此

$$\|\alpha x\| = \inf_{\alpha x \in \mu U} \mu = \inf_{\alpha x \in \alpha\lambda U} \alpha\lambda = \alpha \inf_{x \in \lambda U} \lambda = \alpha\|x\|.$$

一般情形

$$\|\alpha x\| = \|\pm|\alpha|x\| = \||\alpha|x\| = |\alpha|\,\|x\|,$$

这就证明了第三性质.

为了完成定理的证明，只须证明对空间X零元的任一零域$V(0)$存在球$\|x\| < \rho$含于$V(0)$. 反之，对任意球$\|x\|<\rho$存在零元邻域$W(0)$含于此球.

今取零元任意邻域$V(0)$. 因为借以引入范数的零元的邻域U为有界集，所以存在 $r > 0$ 使

$$rU \subset V(0).$$

另一方面单位球 $\|x\| < 1$ 显然含于邻域U，从而球 $\|x\| < r$ 含于rU，当然也含于$V(0)$.

反之，给定球 $\|x\| < \rho$. 由范数定义可知这个球含有零元邻域$\rho' U$，其中ρ'是小于ρ的任意数.

定理条件的充分性至此已完全证毕. 至于必要性的证明是没有什么困难的.

§4 Hilbert 空间

在n维实(复)空间E_n内除去矢量的加法运算以及它与实(复)数的乘法外，我们也定义了矢量的内积. 即是说，在复空间E_n内，矢量

$$x = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\} \text{ 和 } y = \{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n\}$$

的**内积**是指复数

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \bar{\eta}_i.$$

至于矢量 $x = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$ 的范数或说长度则可借内积由下述公式表达:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2} = \sqrt{(x, x)}.$$

在分析中广泛地应用着函数的内积这一重要概念.

为此我们自然地要考虑定义了内积的线性空间．这样的空间称为 Hilbert 空间，它由下述公理定义．

Hilbert 空间的定义．设H为元$x, y, z, \cdots$的集．并设

1. H 为复线性空间．

2. 对H的每一对元x和y有复数(x, y)与之对应——称为x和y的内积，并设内积满足下述条件：

a) $(x, y) = \overline{(y, x)}$（特别$(x, x)$为实数），

b) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$，

c) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ 对任意复数 λ，

d) $(x, x) \geqslant 0$ 且 $(x, x) = 0$ 当且仅当 $x = 0$．数$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$称为元x的范数，我们就要证明$\|x\|$满足线性赋范空间内范数所有的条件．

3. H在距离 $\rho(x, y) = \|x - y\|$下是完备的．

对于满足这三个公理的集H称为U空间．n维U空间就是复欧氏空间．此外如果空间H还满足公理．

4. 对任意自然数n在H内总存在n个线性无关元，即H为无穷维的．我们就称它为一个 Hilbert 空间．

例 1. 复空间l_2是一个 Hilbert 空间，如果对任两元$x = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots\}$知$y = \{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n, \cdots\}$令

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \bar{\eta}_i.$$

对任意元x和y这个级数的收敛由 Cauchy-Буняковский 不等式可知．

例 2. 复空间 $L_{2,\rho}[0, 1]$．这是定义在区间$[0, 1]$上的复值可测且满足

$$\int_0^1 \rho(t) |x(t)|^2 dt < \infty$$

的函数 $x(t)$ 的全体．式中 $\rho(t)$ 为实数在 $[0, 1]$ 上殆遍有

$\rho(t)\geqslant 0$，此外 $\rho(t)>0$ 在正测度集上成立，$L_{2,\rho}[0,1]$ 是 Hilbert 空间，如果对 $x, y\in L_{2,\rho}$ 令

$$(x,y)=\int_0^1 \rho(t)x(t)\bar{y}(t)dt.$$

这个积分对任意的 $x(t), y(t)\in L_{2,\rho}[0,1]$ 的存在由 Cauchy-Буняковский 积分不等式可知。特别，对 $\rho(t)=1$ 得复 Hilbert 空间 L_2 具有内积

$$(x,y)=\int_0^1 x(t)\bar{y}(t)dt.$$

同理，我们可以定义实 Hilbert 空间。这时两元的内积必须为实。

实空间 l_2, $L_{2,\rho}$, L_2 为实 Hilbert 空间。

我们略论一下 Hilbert 空间某些最简单的性质。

首先由公理 1—3 容易得出

$$(x, y_1+y_2)=(x,y_1)+(x,y_2),\quad (x,\lambda y)=\bar{\lambda}(x,y).$$

由最后这个等式特别有

$$\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|. \tag{1}$$

现在我们对内积一般地来证明 Cauchy-Буняковский-Schwarz 不等式，对任意 x $y\in H$ 和 $y\neq 0$ 以及任意复数 λ 我们有

$$(x+\lambda y, x+\lambda y)\geqslant 0$$

或
$$(x,x)+\bar{\lambda}(x,y)+\lambda(y,x)+|\lambda|^2(y,y)\geqslant 0.$$

令
$$\lambda=-\frac{(x,y)}{(y,y)}$$

我们得
$$(x,x)-\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)}\geqslant 0$$

或
$$|(x,y)|\leqslant\|x\|\|y\|, \tag{2}$$

这就是所要的不等式.

对 $y=0$ 的情形，不等式是显然的。

此外，我们还有

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= (x+y, x+y) \\ &= (x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y) \\ &\leqslant \|x\|^2+2\|x\|\|y\|+\|y\|^2 \\ &= (\|x\|+\|y\|)^2,\end{aligned}$$

或

$$\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|. \tag{3}$$

公理2的d)和公式(1)(3)指出借助内积引入的范数满足线性赋范空间范数的所有公理. 从而，由此范数所引入的距离当然满足距离公理.

引理 1 内积关于范数收敛是两变元的连续函数.

事实上，设 $x_n \to x$, $y_n \to y$. 那么 $\|x_n\|$ 和 $\|y_n\|$ 有界. 令 M 代表它们的一个上界. 于是

$$\begin{aligned}&|(x_n, y_n)-(x,y)| \\ &= |(x_n,y_n)-(x_n,y)+(x_n,y)-(x,y)| \\ &\leqslant |(x_n,y_n)-(x_n,y)|+|(x_n,y)-(x,y)| \\ &= |(x_n, y_n-y)|+|(x_n-x, y)| \\ &\leqslant \|x_n\|\|y_n-y\|+\|x_n-x\|\|y\| \\ &\leqslant M\|y_n-y\|+\|y\|\|x_n-x\|.\end{aligned}$$

因为 $\|x_n-x\|\to 0$ 且 $\|y_n-y\|\to 0$ 对 $n\to\infty$. 所以

$$|(x_n,y_n)-(x,y)|\to 0 \quad n\to\infty.$$

这就是所要证明的.

正交性 两元 x, $y\in H$ 称为正交的（记成 $x\perp y$）如果 $(x,y)=0$. 元 x 称为与子空间 $L\subset H$ 正交，如果 x 与任一元 $y\in L$ 成正交. 这时我们记成 $x\perp L$.

下述定理是非常重要的.

定理 1 设 $x\in H$ 且 L 为空间 H 的某一子空间. 那么

$$x = y+z, \tag{4}$$

式中 $y\in L$，且 $z\perp L$. 不仅如此，上述分解也是唯一的.

如果 $x\in L$，那么显然有 $y=x$ 和 $z=0$. 因此可设 $x\bar{\in}L$. 令

$$d=\inf_{y\in L}\|x-y\|^2.$$

设$\{y_n\}$是 L 内一个元列使

$$d_n=\|x-y_n\|^2\to d \quad n\to\infty.$$

此外设 h 为 L 任一异于零的元，于是对任意复数 ε 有 $y_n+\varepsilon h\in L$，从而也有

$$\|x-(y_n+\varepsilon h)\|^2\geqslant d.$$

换言之，

$$\|x-y\|^2-\bar{\varepsilon}(x-y_n,h)-\varepsilon(h,x-y_n)$$
$$+|\varepsilon|^2\|h\|^2\geqslant d.$$

令

$$\varepsilon=\frac{(x-y_n,h)}{\|h\|^2},$$

我们得

$$\|x-y_n\|^2-\frac{|(x-y_n,h)|^2}{\|h\|^2}\geqslant d,$$

由此 $$|(x-y_n,h)^2|\leqslant\|h\|^2(d_n-d),$$

或 $$|(x-y_n,h)|\leqslant\|h\|\sqrt{d_n-d}. \qquad (5)$$

对 $h=0$ 不等式(5)显然也满足. 由这个不等式可知对任意 $h\in L$ 有

$$|(y_n-y_m,h)|\leqslant|(y_n-x,h)|+|(x-y_m,h)|$$
$$\leqslant(\sqrt{d_n-d}+\sqrt{d_m-d})\|h\|.$$

特别，令 $h=y_n-y_m$ 我们得

$$\|y_n-y_m\|\leqslant\sqrt{d_n-d}+\sqrt{d_m-d}.$$

这就是说序列 $\{y_n\}$ 自收敛，且再由H的完备性知此序列收敛于某一元 $y\in H$。因为 L 闭所以 $y\in L$.

在不等式(5)中取极限我们得 $(x-y,h)=0$。既然 h

为子空间L的任一元，所以 $x-y\perp L$. 再令 $x-y=z$ 得出所要的等式

$$x=y+z.$$

我们还要证明这个表现的唯一性. 令

$$x=y+z,\quad x=y'+z',$$

其中 $y, y'\in L$, $z, z'\perp L$. 由 $y-y'=z'-z$ 有

$$\|y-y'\|^2=(z'-z, y-y')=0, \tag{6}$$

这是因为 $y-y'\in L$,但 $z'-z\perp L$. (6)式是说 $y=y'$, 从而也有 $z=z'$. 定理证毕.

在分解式(4)中的 y 称为元 x 在子空间 L 上的射影,不难看出与子空间L成正交的所有元的集M也是一个子空间. 事实上，M为线性流形是显然的. 至于M的闭性则由内积的连续性可知. 因此我们可以说元 z 是 x 在子空间M上的射影. 这个子空间M称为L的正交余并用记号 $H\dot{-}L$ 表示. 我们也说H是子空间L和M的正交和并记作 $H=L\dot{+}M$.

显然，正交和是直和的特例. 因此定理是说H的任一元可以分解为两个相互正交子空间上的射影.

引理 2 为使线性流形M在H内稠密,必须且只须不存在异于零的元而与流形M的所有元正交.

证明. 必要性. 显然由 $x\perp M$ 得 $x\perp\overline{M}$. 但依条件 $\overline{M}=H$,从而 $x\perp H$, 特别 $x\perp x$, 从而 $x=0$. 这就证明了必要性.

充分性. 设M不是在H稠密的,于是 $\overline{M}\neq H$, 从而存在元 $x\bar{\in}M$. 依前述定理有 $x=y+z$,其中 $y\in\overline{M}$, $z\perp\overline{M}$, 而且因 $x\bar{\in}M$ 所以 $z\neq 0$. 但这与条件矛盾. 这就证明了充分性.

正交规范系 空间H的元系 $e_1, e_2,\cdots, e_n,\cdots$称为一个正交规范系,如果

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij},$$

式中 δ_{ij} 是我们熟知的 Kronecker 记号，即它对 $i = j$ 具有值为一且对 $i \neq j$ 其值为零.

在复空间 $L_2[0, 1]$ 内 $\{e^{i2\pi nt}\}$ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 是正交规范系的一个例子.

线性空间一个无穷系称为**线性无关的**，如果它的任一有限子系都线性无关.

对任一线性无关系 $h_1, h_2, \cdots, h_n, \cdots$ 我们都可以用 E.Schmidt **正交化方法**把它转换成为一个正交规范系.

令 $e_1 = \dfrac{h_1}{\|h_1\|}$. 设 $g_2 = h_2 - c_{21}e_1$. 取 c_{21} 使 g_2 与 e_1 正交. 显然为此目的必须令 $c_{21} = (h_2, e_1)$. 再令 $e_2 = \dfrac{g_2}{\|g_2\|}$. 这时 $\|g_2\| \neq 0$，否则，如果 $g_2 = 0$，那么 h_1 和 h_2 将是线性相关的了. 这与假设相矛盾. 今设 $e_1, e_2, \cdots e_{k-1}$ 已经构造出来. 令

$$g_k = h_k - \sum_{i=1}^{k-1} c_{ki}e_i$$

并选数 c_{ki} 使 g_k 与 $e_1, e_2, \cdots, e_{k-1}$ 正交. 为此取 $c_{ki} = (h_k, e_i)$. 再令 $e_k = \dfrac{g_k}{\|g_k\|}$，这时仍有 $\|g_k\| \neq 0$. **照此归纳**地进行下去就得出所要的正交规范系.

例. 如果把幂函数的全体

$$1, t, t^2, \cdots, t^n, \cdots$$

在具有权 $\rho(t)$ 的平方可和函数的实空间 $L_{2,\rho}[a, b]$ 内正交化，我们就得出一系具有权 $\rho(t)$ 的正交多项式

$$p_0(t) = \text{const}, \ p_1(t), \ p_2(t), \cdots, p_n(t), \cdots$$

$$\int_a^b \rho(t)p_i(t)p_j(t)\,dt = \delta_{ij}.$$

当 $\rho(t)\equiv 1$，$a=-1$，$b=+1$ 时，那么除去常数因子不计外我们得出 Legendre 多项式系。当 $\rho(t)=e^{-t^2}$，$a=-\infty$，$b=+\infty$ 时我们就得出 Чебышев-Hermite 多项式系。当 $\rho(t)=e^{-t}$，$a=0$，$b=+\infty$ 时我们就得出 Чебышев-Laguerre 多项式系。

设 L 是由正交规范系 $e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots$ 所产生的子空间且 $x\in L$。从而对任意 $\varepsilon>0$ 存在这样线性组合 $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$ 使

$$\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right\|<\varepsilon.$$

但
$$\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right\|^2$$

$$=\|x\|^2-\sum_{i=1}^{n}\bar{\alpha}_i(x, e_i)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(e_i, x)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\bar{\alpha}_j(e_i, e_j)$$

$$=\|x\|^2-\sum_{i=1}^{n}\bar{\alpha}_i c_i-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\bar{c}_i+\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2,$$

其中 $c_i=(x, e_i)$。

数 c_i 称为元 x 关于正交规范系 $\{e_i\}$ 的 Fourier **系数**，由最后一个等式得

$$\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right\|^2$$

$$=\|x\|^2-\sum_{i=1}^{n}|c_i|^2+\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i-c_i|^2.$$

由此可知差 $x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$ 的范数取最小值，如果系数 α_i 是元 x 关于系 $\{e_i\}$ 的 Fourier 系数 c_i 的话．在这个情形下我们有

$$0\leqslant\left\|x-\sum_{i=1}^{n}c_ie_i\right\|^2=\|x\|^2-\sum_{i=1}^{n}|c_i|^2<\varepsilon. \tag{7}$$

由(7)式可知级数 $\sum_{i=1}^{\infty}|c_i|^2$ 收敛且

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_i|^2=\|x\|^2.$$

从而也有

$$x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}c_ie_i=\sum_{i=1}^{\infty}c_ie_i.$$

今设 x 为空间 H 任一元．用 z 代表 x 在 L 上的射影，那么

$$z=\sum_{i=1}^{\infty}c_ie_i,$$

其中 $c_i=(z, e_i)=(x, e_i)$ 且 $\sum_{i=1}^{\infty}|c_i|^2=\|z\|^2$.

因为 $x=z+y$, $z\in L$. $y\perp L$，所以

$$\|x\|^2=\|z\|^2+\|y\|^2\geqslant\|z\|^2. \tag{8}$$

换句话说，对 H 的任一元 x 成立不等式

$$\sum_{i=1}^{\infty}|c_i|^2\leqslant\|x\|^2,$$

其中 $c_i=(x, e_i)$ $(i=1, 2, \cdots)$．这个关系称 Parseval **不等式**.

Стеклов 闭性．B. Стеклов 在研究依正交系展开函数的问题时引入了正交系的闭性这一重要概念.

设在空间H内给定正交规范系$\{e_i\}$. 如果不存在异于零的元与$\{e_i\}$的所有元正交，那么这个系称完全的. 正交规范系$\{e_i\}$称为闭的，如果由这个系所产生的子空间L与整个空间H相重合. 对任意$x \in H$，它依闭系所构造的 Fourier 级数$\sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$收敛且收敛于$x$. 此外对任一$x \in H$也有 Parseval-Стеклов 等式

$$\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 = \|x\|^2, \tag{9}$$

成立.

闭正交规范系也称 Hilbert 空间的正交基.

如果正交系是完全的，那么它也是闭的. 事实上，不存在异于零的元与由此系所产生的流形L正交，再由引理 2 有$\bar{L} = H$，所以L是闭的.

反之闭正交规范系$\{e_i\}$是完全的. 因为对这样系

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2.$$

如果$x \perp e_i$，$i = 1, 2, \cdots$，那么$c_i = 0$，$i = 1, 2, \cdots$，从而也有$x = 0$. 这就是说$\{e_i\}$是完全的.

作为完全正交规范系的例子可以指出实空间$L_2[-\pi, \pi]$内的三角函数系$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$，$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t$，$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t$，$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2t$，$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2t, \cdots$.

容易证明在任一可分 Hilbert 空间内完全正交规范系存在. 设$G = \{g_1, g_2, \cdots, g_n, \cdots\}$是任一个在$H$内可数稠密集，而且所有$g_n$ $n = 1, 2, \cdots$异于零. 令

$$e_1 = \frac{g_1}{\|g_1\|},$$

且设 L_1 是由元 e_1 所产生的一维子空间．令 g_{n_2} 是集 G 内不属于 L_1 的第一个元，再令 h_2 是 g_{n_2} 在 $H \dot{-} L$ 上的射影．取

$$e_2 = \frac{h_2}{\|h_2\|}.$$

并设 L_2 是由元 e_1 和 e_2 所产生的子空间，若 g_{n_3} 是 G 内第一个不属于 L_2 的元，那么对它在 $H \dot{-} L_2$ 上的射影 h_3 令

$$e_3 = \frac{h_3}{\|h_3\|}.$$

这样继续下去，我们就得出一个正交规范系 $e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots$．而且由于每一个元 g_n 总属于某一 L_m，所以由系 $\{e_i\}$ 产生的子空间与由 $\{g_i\}$ 所产生的子空间一致，即与 H 一致．这时系 $\{e_i\}$ 必然是无穷可数的，因为如果它只含有限个例如 p 个元，那么由线性代数上的熟知事实，H 不可能有 $p+1$ 个线性无关元，这与公理 4 是相矛盾的．

设 $\{e_i\}$ 是一个完全正交规范系，H 的元 x 和 y 关于此系的 Fourier 系数依次为 c_i 和 d_i，$i=1, 2, \cdots$，那么不难验证

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \bar{d}_i.$$

可分 Hilbert 空间的同构 考虑可分 Hilbert 空间 H．这 $\{e_i\}$ 是这个空间内的一个完全正交规范系．设 x 为 H 的某一元，那么对此元可使数列 $\{c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots\}$ 与之对应，其中 c_i 是无关于 $\{e_i\}$ 的 Fourier 系数．我们已经证明级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2$$

是收敛的，所以序列 $\{c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots\}$ 可以看做复空间 l_2 的某一元 $\tilde{x}$．由此可知，任给元 $x \in H$ 总有某一元 $\tilde{x} \in l_2$ 与之对应，而且由系的完全性条件也有

$$\|x\|_H = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|\tilde{x}\|_{l_2}, \tag{10}$$

式中下标指的是关于什么空间所取的范数．此外，若 $x \in H$，$y \in H$，的对应元为 $\tilde{x} \in l_2$，$\tilde{y} \in l_2$，那么和 $x \pm y$ 对应的元是 $\tilde{x} \pm \tilde{y}$ 且

$$\|x - y\|_H = \|\tilde{x} - \tilde{y}\|_{l_2}. \tag{11}$$

设 $\tilde{z} = \{\zeta_i\}$ 为 l_2 的某一元，我们在 H 内未考虑元列 $z_n = \sum_{i=1}^{n} \zeta_i e_i$，$n = 1, 2, \cdots$．我们有

$$\|z_n - z_m\|^2 = \left\| \sum_{i=m+1}^{n} \zeta_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=m+1}^{n} |\zeta_i|^2,$$

因此
$$\|z_n - z_m\| \to 0$$
对 n，$m \to \infty$．换句话说，序列 $\{z_n\}$ 在空间 H 的距离的意义下自收敛，而且再由它的完备性此序列收敛于空间的某一元 z．因为

$$(z, e_i) = \lim_{n\to\infty}(z_n, e_i) = \zeta_i,$$

所以元 z 的关于选定的正交规范系的 Fourier 系数正好就是给定的数 ζ_i．

这样我们就在空间 H 和 l_2 的元之间建立了一个一对一关系．公式(11)也指出这个对应是一个等距．再由以上所述，这个对应也保持加法且显然也保持数乘法．所以得出这个对应是一个同构．由此完全证明了下述定理：

定理 2 每一复(实)可分 Hilbert 空间等距同构于复(实)空间 l_2，从而所有复(实)可分 Hilbert 空间相互等距同构．

特别可得

定理 3．(Riesz-Fischer) 复(实)空间 $L_2[0, 1]$ 和 l_2 等距同构．

§5 广义导数、Соболев 空间

在数学物理中引入线性偏微分方程的广义解是需要的. 这样的方程在普通意义下的解的全体如果看做具有某一距离的函数空间的元的话，那么这些空间一般说来不是完备的. 使这些空间完备化之后导出了作为完备空间的元的所谓广义解.

例如由方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

描述的无穷弦的自由振动的解有如

$$u(x,t)=\varphi(x+at)+\psi(x-at) \tag{1}$$

的形式，其中 φ 和 ψ 为二次可微函数. 例如使这样的解的全体依一致收敛距离完备化之后，我们就导出广义解的全体仍具有(1)的形式，但 φ 和 ψ 已经是任意的连续函数了.

为了构造广义解 С. Л. Соболев 首先引入广义导数的概念. 以下我们对某些最简单的情形来谈一下广义导数理论及 Соболев 空间[30]的基础.

设 G 是平面上某一有界凸域. 我们考虑函数 $\varphi(x,y)$，它在含有 G 的闭包的某一域内连续且具有直到 l 阶的连续导数. (这时我们说 $\varphi(x,y)$ 及其直到 l 阶导数在 $\bar{G}$ 连续). 在这样函数的集内利用下式引入范数

$$\|\varphi\|=\left(\iint_G|\varphi(x,y)|^p dxdy+\sum_{l_1+l_2=l}\iint_G\left|\frac{\partial^l\varphi}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}\right|^p dxdy\right)^{\frac{1}{p}},$$

不难验证范数的所有公理被满足，这样我们就得出一个非完备的线性赋范空间，用 $\widetilde{W}_p^{(l)}$ 代表它. 依引入的这个范数使空间完备化，我们得出 Соболев 空间 $W_p^{(l)}$.

设 f_0 是空间 $W_p^{(l)}$ 的一个元但不含于 $\widetilde{W}_p^{(l)}$. 这就是说，存在函数列 $\{\varphi_n(x,y)\}\subset\widetilde{W}_p^{(l)}$ 使

$$\|\varphi_n - f_0\|_{W_p^{(l)}} \to 0 \quad n\to\infty.$$

由此

$$\|\varphi_m - \varphi_n\|_{W_p^{(l)}} \to 0, \quad n, m\to\infty,$$

即有

$$\iint_G |\varphi_m(x,y) - \varphi_n(xy)|^p dxdy \to 0$$

和

$$\iint_G \left|\frac{\partial^l \varphi_m}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}} - \frac{\partial^l \varphi_n}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}\right|^p dxdy \to 0,$$

$$l_1 + l_2 = l, \quad n, m\to\infty.$$

因此 $L_p(G)$（见附录 II)内序列 $\{\varphi_n(x,y)\}$和 $\left\{\frac{\partial^l \varphi_n(x,y)}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}\right\}$ 依 p 幂平均自收敛. 由于空间 $L_p(G)$ 的完备性存在函数 $\varphi_0(x,y)$ 和 $\varphi_0^{(l_1,l_2)}(x,y)$ 分别为这些序列的极限. 使元 f_0 和函数 $\varphi_0(x,y)$ 恒等化，我们称函数 $\varphi_0^{(l_1,l_2)}(x,y)$ 为函数 $\varphi_0(x,y)$ 的 l 阶广义导数而且同于普通导数的写法，用 $\frac{\partial^l \varphi_0(x,y)}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}$ 代表它. 因为依定义 $\|f_0\| = \lim\limits_n \|\varphi_n\|$，所以元 f_0 或者说函数 $\varphi_0(x,y)$ 的范数可以写成以前的形式

$$\|\varphi_0\|_{W_p^{(l)}} = \left(\iint_G |\varphi_0(x,y)|^p dxdy + \sum_{l_1+l_2=l}\iint_G \left|\frac{\partial^l \varphi_0}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}\right|^p dxdy\right)^{\frac{1}{p}},$$

其中求和记号下的函数是函数 $\varphi_0(x,y)$ 的 l 阶广义导数.

因此，如果函数 $\varphi_0^{(l_1,l_2)}(x,y)\in L_p(G)$ 是函数 $\varphi_0(x,y)\in L_p(G)$ 的 l 阶广义导数，那么在 $\overline{G}$ 内存在直到 l 阶连续可微函数列 $\varphi_n(x,y)$ 依 p 幂平均收敛于 $\varphi_0(x,y)$ 且序列

$\left\{\dfrac{\partial^l\varphi(x,y)}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}\right\}$ 也依 p 幂平均收敛于 $\varphi_0^{(l_1,l_2)}(x,y)$.

由广义导数的定义可知它作为空间 $L_p(G)$ 的元的唯一性. 如果函数 $\varphi_0(x,y)\in L_p(G)$ 自身在 $\overline{G}$ 具有在通常意义下的直到 l 阶连续导数，那么可取序列 $\{\varphi_n(x,y)\}$ 使 $\varphi_n(x,y)\equiv\varphi_0(x,y)$ 对所有 n,从而

$$\frac{\partial^l\varphi_0}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}=\varphi_0^{(l_1,l_2)}(x,y)=\frac{\partial^l\varphi_n}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}},$$

换句话说,在这个情形下广义导数和通常导数重合.

我们常常需要给出广义导数以另一定义. 先设 $\varphi(x,y)$ 和 $\phi(x,y)$ 在 $\overline{G}$ 内有直到 l 阶连续导数. 且设 $\phi(x,y)$ 在某一边界带形 G_ρ 内为零,其中 G_ρ 是由与 G 的边界的距离不超过 ρ 的那些域内的点所组成. 那么几次使用 Green 公式之后将有

$$\iint_G\frac{\partial^l\phi}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}\varphi(x,y)dxdy$$
$$=(-1)^l\iint_G\phi(x,y)\frac{\partial^l\varphi}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}dxdy.$$

今设 $\varphi(x,y)$ 是空间 $L_p(G)$ 内任一函数. 如果可以求得函数 $\chi(x,y)\in L_p(G)$ 使得对每一个具有上述性质的函数 $\phi(x,y)$ 都有下述等式成立:

$$\iint_G\frac{\partial^l\phi}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}\varphi(x,y)dxdy=(-1)^l\iint_G\phi(x,y)\chi(x,y)dxdy,$$

那么我们称 $\chi(x,y)$为函数 $\varphi(x,y)$的 **l 阶广义导数**.

广义导数两个定义的等价性 为了证明广义导数的这两个定义的等价性,我们需要一些辅助概念和定理.

有如通常, 令 r 代表点 $P(x,y)$ 和 $Q(\xi,\eta)$ 的距离. 函数

$$\omega_h(x, y; \xi, \eta) = \begin{cases} c_h e^{\frac{r^2}{r^2-h^2}} & r < h \\ 0 & r \geq h \end{cases}$$

作为 x 和 y 的函数是连续的，而且具有所有阶连续导数. 此外这些导数在以点 $Q(\xi, \eta)$ 为圆心 h 为半径的圆 K_h 之外为零. 由于 $\omega_h(x, y; \xi, \eta)$ 关于点 P 和 Q 的对称性,那么上面所说的一切如果把 $\omega_h(x, y; \xi, \eta)$ 看成 ξ, η 在以点 $P(x,y)$ 为中心的圆 K_h' 内的函数的话仍然成立,我们也注意一下，ω_h 关于 x 的微分可用关于 ξ 的微分来代替,但具有相应的符号. 自然同样事实对 y 和 η 也成立. 最后我们选择常数 c_h 使

$$\iint_{K_h'} \omega_h(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta = 1.$$

由于

$$\iint_{K_h'} \omega_h(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta = c_h \iint_{K_h'} e^{\frac{r^2}{r^2-h}} d\xi d\eta$$

$$= c_h \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h e^{\frac{r^2}{r^2-h^2}} r dr = 2\pi c_h \int_0^h e^{\frac{r^2}{r^2-h^2}} r dr,$$

所以
$$c_h = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^h e^{\frac{r^2}{r^2-h^2}} r dr \right)^{-1}.$$

由此也不难看出，对于给定的 h，c_h 的选择不依赖于点 $P(x, y)$在平面上的位置.

具有上述性质的两对变元 (x, y) 和 (ξ, η) 的函数称为**平均化核**,函数 $\omega_h(x, y; \xi, \eta)$ 就是平均化核的一个例子.

设 $\varphi(x, y)$ 为 $L_p(G)$ 内任一函数. 对 $P(x, y) \bar{\in} G$ 令 $\varphi(x, y) = 0$. 这样我们就补定义了此函数于全平面上. 函数

$$\varphi_h(x,y) = \iint_{K_h'} \omega_h(x, y; \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

称为函数 $\varphi(x,y)$ 的**平均函数**.

不难验证,定义函数 $\varphi_h(x,y)$ 的积分在整个平面上一致收敛. 事实上，设 R_δ 是平面上以任一点为中心 δ 为半径的圆,那么令

$$q=\frac{p}{p-1},$$

可得

$$\left|\iint\limits_{R_\delta}\omega_h(x,y;\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta\right|$$

$$\leqslant\left(\iint\limits_{R_\delta}|\varphi(\xi,\eta)|^p d\xi d\eta\right)^{\frac{1}{p}}\left(\iint\limits_{R_\delta}\omega_h(x,y;\xi,\eta)^q d\xi d\eta\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant\left(\iint\limits_{G}|\varphi(\xi,\eta)|^p d\xi d\eta\right)^{\frac{1}{p}}\left(\iint\limits_{R_\delta}\omega_h(x,y;\xi,\eta)^q d\xi d\eta\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\|\varphi\|_{L_p}\left(\iint\limits_{R_\delta}\omega_h(x,y;\xi,\eta)^q d\xi d\eta\right)^{\frac{1}{q}}.$$

但最后这个积分由于 $\omega_R(x,y;\xi,\eta)$ 的有界性，对充分小的 δ 可使之对平面上点 $P(x,y)$ 的所有位置而任意小。

同理可以证明对任意 l 和 $l_1+l_2=l$ 积分

$$\iint\limits_{K_h'}\frac{\partial^l\omega_h}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

的一致收敛性.

由此得出，$\varphi_h(x,y)$ 是无穷次连续可微函数.

我们也注意，如果函数族 $\{\varphi_\alpha(x,y)\}$ 属于空间 $L_p(G)$ 的一个有界集，那么有如上述估值式所指出的那样，平均函数

$$[\varphi_\alpha(x,y)]_h=\iint\limits_{K_h'}\omega_h(x,y;\xi,\eta)\varphi_\alpha(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

是一致有界的且等度连续的。

我们证明两个有关平均函数的引理。

引理 1 对任意函数 $\varphi(x, y) \in L_p(G)$ 和任意 $h>0$，

$$\|\varphi_h\|_{L_p} \leqslant \|\varphi\|_{L_p}.$$

我们把 $\varphi_h(x, y)$ 写成如下形式

$$\varphi_h(x,y) = \iint_{K_h'} \omega_h(x,y;\xi,\eta)^{\frac{1}{p}} \varphi(\xi,\eta) \omega_h(x,y;\xi,\eta)^{\frac{1}{q}} d\xi d\eta,$$

再应用 Hölder 不等式可得 $\left(q = \dfrac{p}{p-1}\right)$

$$|\varphi_h(x,y)| \leqslant \left(\iint_{K_h'} \omega_h(x,y;\xi,\eta) |\varphi(\xi,\eta)|^p d\xi d\eta\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times \left(\iint_{K_h'} \omega_h(x,y;\xi,\eta) d\xi d\eta\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\iint_{K_h'} \omega_h(x,y;\xi,\eta) |\varphi(\xi,\eta)|^p d\xi d\eta\right)^{\frac{1}{p}},$$

这是因为 $\iint\limits_{K_h'} \omega_h(x,y;\xi,\eta) d\xi d\eta = 1$ 之故. 把不等式两端取 p 次幂再关于 G 积分可得

$$\iint_G |\varphi_h(x,y)|^p dxdy$$

$$\leqslant \iint_G \left\{\iint_{K_h'} \omega_h(x,y;\xi,\eta) |\varphi(\xi,\eta)|^p d\xi d\eta\right\} dxdy.$$

因为在 K_h' 处函数等于零，且在 G 处函数等于零，所以里面的积分的区域可以取做 G. 之后再应用 Fubini 定理交换积分的顺序可得

$$\iint_G |\varphi_h(x,y)|^p dxdy$$

$$\leqslant \iint_G |\varphi(\xi, \eta)|^p \left\{ \iint_G \omega_h(x, y; \xi, \eta) dxdy \right\} d\xi d\eta$$

$$\leqslant \iint_G |\varphi(\xi, \eta)|^p \left\{ \iint_{K'_h} \omega_h(x, y; \xi, \eta) dxdy \right\} d\xi d\eta.$$

里面这个积分仍然等于一,所以

$$\iint_G |\varphi_h(x, y)|^p dxdy \leqslant \iint_G |\varphi(\xi, \eta)|^p d\xi d\eta.$$

由此得出所要的不等式.

注. 设 G^* 是 G 的一个子域. 那么

$$\iint_{G^*} |\varphi_h(x, y)|^p dxdy \leqslant \iint_{G^*} |\varphi(x, y)|^p dxdy + \alpha(h),$$

其中 $\alpha(h) \to 0$ 当 $h \to 0$, 如果区域 G^* 的边界充分光滑的话.

事实上,有如引理的证明可以得出

$$\iint_{G^*} |\varphi_h(x, y)|^p dxdy$$

$$\leqslant \iint_{G^*} \left\{ \iint_{K'_h} \omega_h(x, y; \xi, \eta) |\varphi(\xi, \eta)|^p d\xi d\eta \right\} dxdy.$$

令 G^*_h 代表域 $G \backslash G^*$ 的这样点的全体,它距域 G^* 的边界的距离不超过 h. 于是

$$\iint_{G^*} |\varphi_h(x, y)|^p dxdy$$

$$\leqslant \iint_{G^*} \left\{ \iint_{G^* \cup G^*_h} \omega_h(x, y; \xi, \eta) |\varphi(\xi, \eta)|^p d\xi d\eta \right\} dxdy$$

$$\leqslant \iint_{G^* \cup G^*_h} |\varphi(\xi, \eta)|^p \left\{ \iint_{K'_h} \omega_h(x, y; \xi, \eta) dxdy \right\} d\xi d\eta$$

$$= \iint_{G^* \cup G_h^*} |\varphi(\xi, \eta)|^p d\xi d\eta = \iint_{G^*} |\varphi(\xi, \eta)|^p d\xi d\eta$$

$$+ \iint_{G_h^*} |\varphi(\xi, \eta)|^p d\xi d\eta.$$

注意到区域 G^* 的边界的充分光滑性，可以证明 $\mathrm{mes} G_h^* \to 0$ 对 $h \to 0$. 于是由 Lebesgue 积分的绝对连续性将有

$$\alpha(h) = \iint_{G_h^*} |\varphi(\xi, \eta)|^p d\xi d\eta \to 0$$

对 $h \to 0$.

引理 2 对任意函数 $\varphi(x, y) \in L_p(G)$，当 $h \to 0$ 时

$$\|\varphi_h - \varphi\|_{L_p} \to 0.$$

先设 $\varphi(x, y)$ 在区域 G 连续，由于 G 是有界的，所以在它的任一闭子域上一致连续. 对任意子域 $G' \subset G$ 有

$$\iint_G |\varphi_h - \varphi|^p dxdy$$

$$= \iint_{G'} |\varphi_h - \varphi|^p dxdy + \iint_{G \setminus G'} |\varphi_h - \varphi|^p dxdy.$$

由 Minkowski 不等式及上述的注我们有

$$\iint_{G \setminus G'} |\varphi_h - \varphi|^p dxdy$$

$$\leqslant \left\{ \left(\iint_{G \setminus G'} |\varphi_h|^p dxdy \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\iint_{G \setminus G'} |\varphi|^p dxdy \right)^{\frac{1}{p}} \right\}^p$$

$$\leqslant 2^p \iint_{G \setminus G'} |\varphi|^p dxdy + \nu(h), \tag{2}$$

式中 $\nu(h) \to 0$ 对 $h \to 0$.

任意给定 $\varepsilon > 0$. 先选 G' 使

$$2^p\iint\limits_{G\setminus G'}|\varphi(x,y)|^p dxdy<\frac{\varepsilon^p}{4}.$$

固定 G'，取 h_0 使对 $h<h_0$ 时

$$\nu(h)<\frac{\varepsilon^p}{4}.$$

于是

$$\iint\limits_{G\setminus G'}|\varphi(x,y)|^p dxdy<\frac{\varepsilon^p}{2}. \tag{3}$$

另一方面取一个区域 G''，使 $G'\subset G''\subset G$ 且 $\overline{G}'\subset G''$，$\overline{G}''\subset G$，并令 $h<h_0$ 充分小使得 $G'\cup G'_h$ 不超出 G''，我们有

$$|\varphi_h(x,y)-\varphi(x,y)|=\Big|\iint\limits_{K'_h}\omega_h(x,y;\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

$$-\iint\limits_{K'_h}\omega_h(x,y;\xi,\eta)\varphi(x,y)d\xi d\eta\Big|$$

$$\leqslant\iint\limits_{K'_h}|\varphi(\xi,\eta)-\varphi(x,y)|\omega_h(x,y;\xi,\eta)d\xi d\eta$$

$$\leqslant\max_{K'_h}|\varphi(\xi,\eta)-\varphi(x,y)|<\frac{\varepsilon}{(2\,\mathrm{mes}\,G)^{\frac{1}{p}}},$$

这是由于函数 $\varphi(x,y)$ 在区域 $\overline{G}''$ 一致连续，所以 $h<h_0$ 充分小时上式成立．由此

$$\iint\limits_{G'}|\varphi_h(x,y)-\varphi(x,y)|^p dxdy<\frac{\varepsilon^p}{2}. \tag{4}$$

从而由(3)和(4)可得

$$\iint\limits_{G}|\varphi_h(x,y)-\varphi(x,y)|dxdy<\varepsilon^p.$$

既然 $\varepsilon>0$ 是任意的，所以对连续函数的情形引理得证．

今设 $\varphi(x,y)$ 为 $L_p(G)$ 内任一函数，那么首先可以求出 G 内这样一个连续函数 ψ 使

$$\|\varphi-\psi\|_{L_p}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是

$$\begin{aligned}\|\varphi-\varphi_h\|_{L_p}&\leqslant\|\varphi-\psi\|_{L_p}+\|\psi-\psi_h\|_{L_p}+\|\psi_h-\varphi_h\|_{L_p}\\&\leqslant\|\psi-\psi_h\|_{L_p}+\frac{2\varepsilon}{3},\end{aligned}$$

这是因为由引理 1 也有 $\|\varphi_h-\psi_h\|_{L_p}<\frac{\varepsilon}{3}$.

此外由已证的结果，可选 δ 充分小使 $h<\delta$ 时

$$\|\psi-\psi_h\|_{L_p}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是对这样 h 也有

$$\|\varphi-\varphi_h\|_{L_p}<\varepsilon.$$

引理完全证明.

现在我们来证明广义导数两个定义的等价性. 设 $\varphi_0^{(l_1,l_2)}(x,y)$ 是 $\varphi_0(x,y)$ 在第一定义意义下的广义导数. 那么存在具有直到 l 阶连续导数的函数列 $\{\varphi_n(x,y)\}$ 使 $\|\varphi_n-\varphi\|_{L_p}\to 0$ 且

$$\left\|\frac{\partial^l\varphi_n}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}-\varphi_0^{(l_1,l_2)}(x,y)\right\|_{L_p}\to 0\quad n\to\infty.$$

在等式

$$\iint_G\varphi_n(x,y)\frac{\partial^l\psi}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}dxdy$$
$$=(-1)^l\iint_G\frac{\partial^l\varphi_n}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}\psi(x,y)dxdy$$

中取极限可得

$$\iint_G \varphi_0(x,y)\frac{\partial^l\psi}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}dxdy$$

$$=(-1)^l\iint_G \varphi_0^{(l_1,l_2)}(x,y)\psi(x,y)dxdy^{1)},$$

式中 $\psi(x,y)$ 为任一在G的边界为零的 l 次连续可微函数. 故 $\varphi_0^{(l_1,l_2)}(x,y)$ 是 $\varphi_0(x,y)$ 在第二定义意义下广义导数.

设 $\dfrac{\partial^l\varphi_0(x,y)}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}=\chi(x,y)$ 是函数 $\varphi_0(x,y)$ 在第二定义意义下的广义导数. 考虑平均函数 $\varphi_{0,h}(x,y)$ 我们有

$$\frac{\partial^l\varphi_{0,h}(x,y)}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}=\iint_{K_h'}\frac{\partial^l\omega_h(x,y;\xi,\eta)}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}\varphi_0(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

$$=(-1)^l\iint_{K_h'}\frac{\partial^l\omega_h(x,y;\xi,\eta)}{\partial\xi^{l_1}\partial\eta^{l_2}}\varphi_0(\xi,\eta)d\xi d\eta. \tag{5}$$

固定G的任一子区域 G' 使得 $\bar{G}'\subset G$, 取 h 充分小使得以 h 为半径及以 G' 的点为中心的圆在G的内部. 于是 $\omega_h(x,y;\xi,\eta)$ 可以取做在广义导数第二定义中固定的函数 $\psi(x,y)$, 且等式(5)对点 $(x,y)\in G_h$ 可以写成

$$\frac{\partial^l\varphi_{0,h}(x,y)}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}=\iint_{K_h'}\omega_h(x,y;\xi,\eta)\chi(\xi,\eta)d\xi d\eta. \tag{6}$$

依引理 2 由(6)式可得

$$\frac{\partial^l\varphi_{0,h}(x,y)}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}\rightarrow\chi(x,y)$$

对 $h\rightarrow 0$ 和对满足 $\bar{G}'\subset G$ 的任意子区域 G'. 为了回到区

---

1) 如果 $\|\alpha_n(x,y)-\alpha_0(x,y)\|_{L_p}\rightarrow 0$ 且 $\beta(x,y)$ 为任意有界可测函数(或 $\beta(x,y)\in L_q(G)$), 那么由 Hölder 不等式有

$$\iint_G\alpha_n(x,y)\beta(x,y)dxdy\rightarrow\iint_G\alpha_0(x,y)\beta(x,y)dxdy.$$

域G本身，还需要较复杂的推理[29]. 不失一般性可设坐标原点含于G的内部. 令G_K代表这样一个区域，它由G通过关于原点且具有相似系数

$$\frac{k}{k-1},\ k=2,3,\cdots$$

的相似变换而得来.

坐标变换的公式是

$$x'=\frac{k}{k-1}x,\quad y'=\frac{k}{k-1}y,$$

而且不难看出对每一函数 $f(x,y)\in L_p(G)$ 有函数

$$f_k(x,y)=f\left(\frac{k-1}{k}x,\ \frac{k-1}{k}y\right)\in L_p(G_K)$$

与之对应,而且反之也成立. 设函数 $\varphi(x,y)\in L_p(G)$ 具有在第二定义意义下的 l 阶广义导数 $\chi(x,y)\in L_p(G)$. 考虑到对任意 l 次连续可微函数 $\phi(x,y)$ 有

$$\frac{\partial^l\phi}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}=\left(\frac{k}{k-1}\right)^l\frac{\partial^l\phi_K(x',y')}{\partial x'^{l_1}\partial y'^{l_2}},$$

所以由等式

$$\iint_G\varphi(x,y)\frac{\partial^l\phi(x,y)}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}dxdy$$

$$=(-1)^l\iint_G\chi(x,y)\phi(x,y)dxdy$$

通过变量替换可得

$$\left(\frac{k}{k-1}\right)^l\iint_{G_K}\varphi_K(x',y')\frac{\partial^l\phi_K(x',y')}{\partial x'^{l_1}\partial y'^{l_2}}dx'dy'$$

$$=(-1)^l\iint_{G_K}\chi_K(x',y')\phi_K(x',y')dx'dy'.$$

由此可知 $\varphi_K(x,y)$ 具有在第二定义意义下的广义导数

$\left(\frac{k-1}{k}\right)^{l}\chi_k(x, y)$.

我们证明在G内当 $k\to\infty$ 时，$\varphi_K(x, y)$ 平均收敛于 $\varphi(x, y)$ 且 $\frac{\partial^l \varphi_K(x,y)}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}$ 平均收敛于 $\frac{\partial^l \varphi}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}$.

事实上，

$$\iint_G |\varphi(x, y)-\varphi_K(x, y)|^p dxdy$$

$$=\iint_G \left|\varphi(x,y)-\varphi\left(x-\frac{x}{k}, y-\frac{y}{k}\right)\right|^p dxdy,$$

但函数 $\varphi(x,y)\in L_p(G)$ 的平均连续性立刻知道等式右端的积分趋近于零.

此外

$$\left(\iint_G \left|\frac{\partial^p \varphi(x, y)}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}-\frac{\partial^l \varphi_K(x, y)}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}\right|^p dxdy\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\iint_G \left|\chi(x,y)-\left(\frac{k-1}{k}\right)^l \chi_K(x, y)\right|^p dxdy\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\left[1-\left(\frac{k-1}{k}\right)^l\right]\left(\iint_G \left|\chi\left(x-\frac{x}{k}, y-\frac{y}{k}\right|^p dxdy\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\left(\iint_G \left|\chi(x, y)-\chi\left(x-\frac{x}{k}, y-\frac{y}{k}\right)\right|^p dxdy\right)^{\frac{1}{p}}.$$

仍由函数 $\chi(x, y)$[1] 的平均连续性可知上式右端第二项趋近于零. 至于第一次，由于因子 $\left[1-\left(\frac{k-1}{k}\right)^l\right]\to 0$，而且在此项中出现的积分作为平均收敛函数列 $\{\chi_k(x, y)\}$ 的范数是依全体有界的.

因为对每一固定的 k，$G\subset G_K$，那么依上述证明在G内当

1) 见附录 1.

$h \to 0$ 时

$$\varphi_{k,h}(x, y) \to \varphi_k(x, y), \quad \frac{\partial^l \varphi_{k,h}(x,y)}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}} \to \frac{\partial^l \varphi_k(x,y)}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}}.$$

但在另一方面，正如刚才所证明过的那样，在G内当 $k \to \infty$ 时依平均

$$\varphi_k(x, y) \to \varphi(x, y), \quad \frac{\partial^l \varphi_k(x,y)}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}} \to \chi(x, y).$$

由此不难看出，可以求得 l 次连续可微函数序列$\{\varphi_{k,h_k}(x, y)\}$在$G$内平均收敛于 $\varphi(x, y)$ 而且它的 l 阶导数平均收敛于$\chi(x, y)$，换句话说，$\chi(x, y)$ 是在第一定义意义下的广义导数.

由广义导数第二定义可得：

a) 若

$$\phi(x, y) = \frac{\partial^l \varphi(x,y)}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}}, \text{ 且 } \chi(x, y) = \frac{\partial^k \phi(x, y)}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}},$$

那么
$$\chi(x, y) = \frac{\partial^{l+k} \varphi(x, y)}{\partial x^{l_1+k_1} \partial y^{l_2+k_2}},$$

b) 广义导数不依赖于微分的顺序，

c) 广义微分法运算是可分配的.

我们还可以证明，对广义导数来说，乘积微分法公式仍成立.

Соболев 公式 广义导数的存在不能由普遍意义的导数的殆遍存在而推得. 由下述例子（Соболев）可以说明这一点.

设 $\varphi(x)$ 在闭区间[0, 1]上给定，且设它在此区间上有广义导数 $\chi(x)$. 那么对任一个连续可微而且随同其导数在此闭区间的端点为零的函数 $\phi(x)$ 有

$$\int_a^b \varphi(x) \psi'(x) dx = -\int_a^b \chi(x) \phi(x) dx.$$

令 $\omega(x)=\int_a^x \chi(\xi)d\xi$. 显然我们有

$$-\int_a^b \chi(x)\psi(x)dx=\int_a^b \omega(x)\psi'(x)dx,$$

由此

$$\int_a^b [\varphi(x)-\omega(x)]\psi'(x)dx=0.$$

因为$\psi'(x)$是任一连续可微函数的导数而且在区间端点为零，所以由最后这个等式可得

$$\varphi(x)=\omega(x)+c.$$

又 $\omega(x)$ 是可和函数即 Lebesgue 可积函数的不定积分，所以它是绝对连续的. 现在很明显，为了得出所需要的例子只须任取一个殆遍有导数但非绝对连续的函数即可.

我们也容易给出一个例子，在此例中的函数有高阶广义导数但无低阶广义导数.

令

$$F(x,y)=f(x)+f(y),$$

其中函数 $f(x)$ 不具有广义导数. 那么 $F(x,y)$ 显然没有一阶广义导数. 但 $F(x,y)$ 确具有二阶广义导数. 事实上，对任一个具有所需的性质的函数 $\psi(x,y)$,

$$\iint_G F(x,y)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}dxdy$$

$$=\iint_G f(x)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}dxdy+\iint_G f(y)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}dxdy,$$

但 $\iint_G f(x)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}dxdy$

$$=\int_a^b f(x)\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}dydx=\int_a^b f(x)\left[\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}dx=0.$$

这是由于 $\psi'_x(x,\varphi_1(x))=\psi'_x(x,\varphi_2(x))=0$，其中 $\varphi_1(x)$ 和

$\varphi_2(x)$ 区域 G 的纵标的边值. 同理

$$\iint_G f(y)\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}dxdy=0.$$

由此

$$\iint_G F(x,y)\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}dxdy=0=\iint_G 0.\,\phi(x,y)dxdy,$$

换句话说 $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}$ 存在且恒等于零.

相当深入的是下述事实：如果函数 $f(x,y)\in L_p(G)$ 具有所有 l 阶广义导数，那么它也有所有 $(l-1)$ 阶广义导数. 为了建立这一结果，我们需要作一些准备.

设 $u(x,y)$ 及其直到 l 阶导数在 $\bar{G}$ 连续. Соболев **积分公式**是说 $u(x,y)$ 可用这个函数的 l 阶导数表示. 在平面上考虑两个点 $P(x,y)$ 和 $Q(\xi,\eta)$ (图 2). 用 r 代表它们之间的距离，并用 θ 代表由 P 到 Q 的矢量半径与 x 轴正向所成的角. 我们显然有

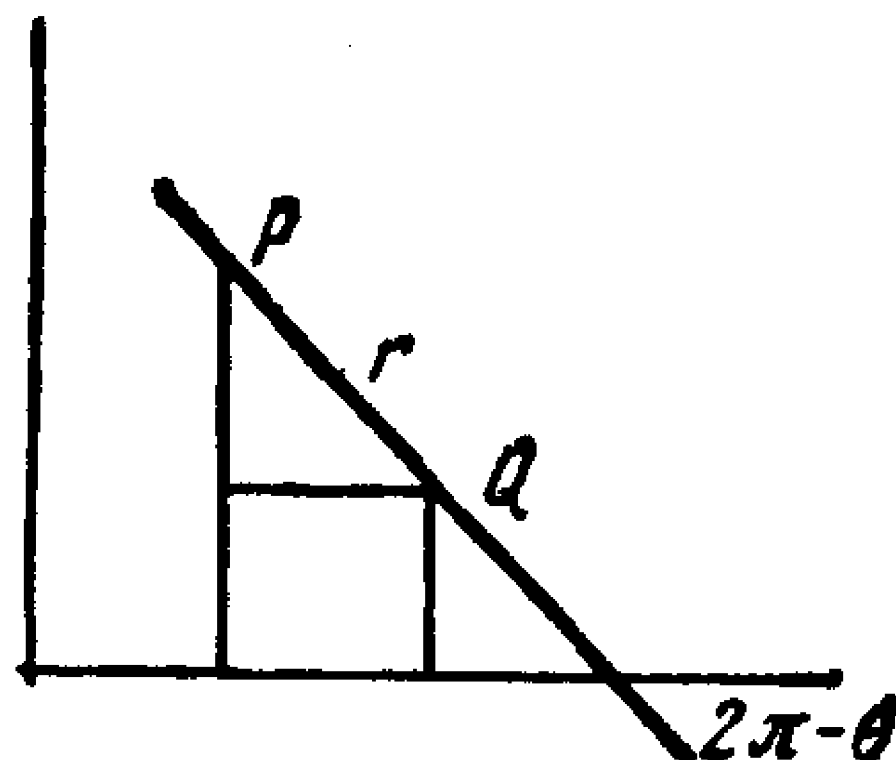


图 2

$$\xi=x+r\cos\theta,\quad \eta=y+r\sin\theta.$$

因此

$$u(\xi,\eta)=u(x+r\cos\theta,\ y+r\sin\theta)=v(x,y,r,\theta),$$

或简写成

$$u(Q)=v(P,r,\theta).$$

显然

$$v(P,0,\theta)=u(P).$$

选择区域 G 内任一内点作为笛卡尔坐标系的原点. 设 K_R 为以此点作中心某一数 R 为半径且完全含于 G 内的一个

圆. 引入函数

$$\omega_R(Q)=\begin{cases} ce^{-\frac{R^2}{R^2-r^2}} & 若\quad r<R \\ 0 & 若\quad r\geqslant 0. \end{cases}$$

其中 $r^2=\xi^2+\eta^2$. 此外再选择常数 c 使

$$\iint\limits_{K_R}\omega_R(Q)d\xi d\eta=1.$$

顺便提一下，$\omega_R(Q)$ 是一无穷连续可微函数.

考虑积分

$$\iint\limits_{K_R}u(Q)\omega_R(Q)dQ.$$

我们用分部积分法对此积分施以变换. 设 $P(x, y)$ 是区域 G 内另一任意点，把 $\omega_R(Q)$ 表成 $\chi_R(P, r, \theta)$，并引用以 P 点为中心且极轴指向 x 轴的极坐标. 我们得出

$$\iint\limits_{K_R}\omega_R(Q)u(Q)dQ=\iint\limits_{G}\omega_R(Q)u(Q)dQ$$

$$=\iint\limits_{G}\chi_R(P, r, \theta)v(P, r, \theta)d\xi d\eta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\infty}v(P, r, \theta)\chi_R(P, r, \theta)rdr.$$

注意一下，所有的积分事实上都是正常积分. 用 $\kappa(r)$ 代表

$$-\int_r^{\infty}\rho\chi_R(P, \rho, \theta)d\rho.$$

函数 $\kappa(r)$ 是 $r\chi_R(P, r, \theta)$ 的原函数. 对里边一个积分用分部积分法可得

$$\iint\limits_{K_R}\omega_R(Q)u(Q)dQ$$

$$=\int_0^{2\pi}\left\{v(P,r,\theta)\kappa(r)\Big|_0^\infty-\int_0^\infty\frac{\partial v(P,r,\theta)}{\partial r}\kappa(r)dr\right\}d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left\{v(P,0,\theta)\int_0^\infty\rho\chi_\rho(P,\rho,\theta)d\rho\right\}d\theta$$

$$+\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^\infty\frac{\partial v(P,r,\theta)}{\partial r}\left[\int_r^\infty\rho\chi_R(P,\rho,\theta)d\rho\right]dr\right\}d\theta.$$

但 $v(P,0,\theta)=u(P)$,

$$\int_0^{2\pi}\int_0^\infty\rho\chi_R(P,\rho,\theta)d\rho d\theta=\iint_G\omega_R(Q)dQ=1,$$

所以我们有

$$u(P)=\iint_G u(Q)\omega_R(Q)dQ$$

$$-\int_0^{2\pi}\int_0^\infty\frac{\partial v(P,r,\theta)}{\partial r}\ \frac{1}{r}\left\{\int_r^\infty\rho\chi_R(P,\rho,\theta)d\rho\right\}rdrd\theta,$$

或

$$u(P)=\iint_G u(Q)\omega_R(Q)dQ$$

$$-\iint_G\frac{\partial u(Q)}{\partial r}\cdot\frac{1}{r}\left[\int_r^\infty\rho\chi_R(P,\rho,\theta)d\rho\right]dQ.$$

为了书写简单令

$$-\int_r^\infty\rho\chi_R(P,\rho,\theta)d\rho=C(P,Q),$$

我们有

$$u(P)=\iint_G u(Q)\omega_R(Q)dQ+\iint_G\frac{\partial u}{\partial r}\frac{1}{r}C(P,Q)dQ.$$

函数 $C(P,Q)$ 对 $P,Q\in G$ 显然有界而且不难看出对 $P\neq Q$ 它也连续. 又当 $P\to Q$ 时随着 θ 的值不同而取不同极限.

因为

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos(r,x)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(r,y),$$

所以上述公式可写成以下形式

$$u(P)=\iint_G u(Q)\omega_R(Q)dQ$$

$$+\iint_G\left\{A_{10}^{(1)}(P,Q)\frac{\partial u}{\partial x}+A_{01}^{(1)}(P,Q)\frac{\partial u}{\partial y}\right\}dQ. \quad (7)$$

在此函数 $A_{i_1i_2}^{(1)}(P,Q)$，$i_1,i_2=0,1$ 有如下形式

$$A_{i_1i_2}^{(1)}(P,Q)=\frac{1}{r}B_{i_1i_2}^{(1)}(P,Q),$$

其中 $B_{i_1i_2}^{(1)}(P,Q)$ 为有界函数.

以 $u(P)$ 的偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 代替 $u(P)$，应用所得公式得出两个公式

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\iint_G\frac{\partial u}{\partial x}\omega_R(Q)dQ$$

$$+\iint_G\left\{A_{10}^{(1)}(P,Q)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+A_{01}^{(1)}(P,Q)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right\}dQ, \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\iint_G\frac{\partial u}{\partial y}\omega_R(Q)dQ$$

$$+\iint_G\left\{A_{10}^{(1)}(P,Q)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+A_{01}^{(1)}(P,Q)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right\}dQ. \quad (9)$$

把导数的表达式(8)和(9)代入等式 (7) 之后再交换积分的顺序和引入新记号

$$\iint_G A_{l_1l_2}^{(1)}(P,Q)dQ=C_{l_1l_2}^{(1)}(P), \quad (10)$$

$$\iint_G A_{l_1l_2}^{(1)}(P,S)A_{l_1'l_2'}^{(1)}(S,Q)dS=A_{l_1+l_1',l_2+l_2'}^{(2)}(P,Q), \quad (11)$$

可得

$$u(P) = \iint_G u(Q)\omega_R(Q)dQ$$

$$+ \sum_{l_1+l_2=1} C^{(1)}_{l_1l_2}(P) \iint_G \frac{\partial u}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}} \omega_R(Q)dQ$$

$$+ \sum_{l_1+l_2=2} \iint_G A^{(2)}_{l_1l_2}(P, Q) \frac{\partial^2 u}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}} dQ.$$

(在此记号 $\sum\limits_{l_1+l_2=K}$ 是指对和为 $l_1 + l_1 = k$ 的所有下标 l_1 和 l_2 由 0 到 k 的求和.)

照此继续下去得出公式

$$u(P) = \iint_G u(Q)\omega_R(Q)dQ$$

$$+ \sum_{l_1+l_2=1} C^{(1)}_{l_1l_2}(P)\iint_G \frac{\partial u}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}} \omega_R(Q)dQ$$

$$+ \sum_{l_1+l_2=2} C^{(2)}_{l_1l_2}(P)\iint_G \frac{\partial^2 u}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}} \omega_R(Q)dQ$$

$$+ \cdots + \sum_{l_1+l_2=l-1} C^{(l-1)}_{l_1l_2}(P)\iint_G \frac{\partial^{l-1} u}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}} \omega_R(Q)dQ$$

$$+ \sum_{l_1+l_2=l} \iint_G A^{(l)}_{l_1l_2}(P, Q)\frac{\partial^l u}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}} dQ,$$

其中对 $C^{(k)}_{l_1l_2}(P)$ 和 $A^{(k)}_{l_1l_2}(P, Q)$ 的公式与(10)和(11)类似.

由公式(10)和(11)可以导出 $A^{(2)}_{l_1l_2}(P, Q)$ 满足不等式

$$|A^{(2)}_{l_1l_2}(P, Q)| \leqslant \alpha \ln r + \beta,$$

其中 α 和 β 为常数，但函数 $A^{(k)}_{l_1l_2}(P, Q)$ 对 $k > 2$ 有界且当 $P \neq Q$ 时连续(例如见[20]).

函数 $C^{(k)}_{l_1l_2}(P)$ 在区域 $\bar{G}$ 连续.

因为函数 $\omega_R(Q)$ 无穷可微且在 G 的边界为零，所以应

用 Green 公式可写

$$\iint\limits_G \frac{\partial^l u}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}\omega_R(Q)dQ = \iint\limits_G u(Q)\frac{\partial^l \omega_R}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}dQ,$$

最后我们得出公式

$$\begin{aligned}
u(P) = &\iint\limits_G u(Q)\omega_R(Q)dQ \\
&+ \sum_{l_1+l_2=1} C^{(1)}_{l_1l_2}(P)\iint\limits_G u(Q)\frac{\partial\omega_R}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}dQ \\
&+ \sum_{l_1+l_2=2} C^{(2)}_{l_1l_2}(P)\iint\limits_G u(Q)\frac{\partial^2\omega_R}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}dQ \\
&+ \cdots + \sum_{l_1+l_2=l-1} C^{(l-1)}_{l_1l_2}(P)\iint\limits_G u(P)\frac{\partial^{l-1}\omega_R}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}dQ \\
&+ \sum_{l_1+l_2=l} \iint\limits_G A^{(l)}_{l_1l_2}(P,Q)\frac{\partial^l u}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}dQ.
\end{aligned}$$

在更一般情形和某种另外的表达形式下这个公式由 С. Л. Соболев[30] 得出。

为了推广这个公式于不具有普通导数而只具有广义导数的函数,先证下述引理.

引理 3 设 $A(P,Q)$ 是形式如下的函数:

$$A(P,Q) = \frac{B(P,Q)}{r},$$

或 $$A(P,Q) = B(P,Q)(\alpha\ln r + \beta),$$

其中 $B(P,Q)$ 是有界可测函数,再设

$$v(P) = \iint\limits_G A(P,Q)u(Q)dQ.$$

那么平均收敛

$$\|u_n(P) - u(P)\|_{L_p} \to 0$$

蕴涵平均收敛

$$\|v_n(P) - v(P)\|_{L_p} \to 0.$$

事实上，在第一种情形下有

$$|v_n(P) - v(P)| \leqslant M \iint_G |u_n(Q) - u(Q)| r^{-1} dQ$$

$$= M \iint_G |u_n(Q) - u(Q)| r^{-\frac{1}{p}} r^{-\frac{1}{q}} dQ$$

$$\leqslant M\left(\iint_G |u_n(Q) - u(Q)|^p r^{-1} dQ\right)^{\frac{1}{p}} \left(\iint_G r^{-1} dQ\right)^{\frac{1}{q}},$$

在此

$$M = \sup_G |B(P,Q)|.$$

引入极坐标以 P 为极点，我们得出

$$\left(\iint_G r^{-1} dQ\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant (2\pi d)^{\frac{1}{q}},$$

其中 d 为 G 的直径．由此

$$|v_n(P) - v(P)| \leqslant M(2\pi d)^{\frac{1}{q}} \left(\iint_G |u_n(Q) - u(Q)|^p r^{-1} dQ\right)^{\frac{1}{p}},$$

从而

$$\iint_G |v_n(P) - v(P)|^p dP$$

$$\leqslant M(2\pi d)^{\frac{p}{q}} \iint_G \left\{\iint_G |u_n(Q) - u(Q)|^p r^{-1} dQ\right\} dP$$

$$= M(2\pi d)^{\frac{p}{q}} \iint_G \left\{|u_n(Q) - u(Q)|^p \cdot \iint_G r^{-1} dP\right\} dQ,$$

我们仍然有

$$\iint_G r^{-1} dP \leqslant 2\pi d,$$

如果我们引入极坐标，并以 Q 为极点的话．由此可得

$$\iint_G |v_n(P) - v(P)|^p dP$$

$$\leqslant M(2\pi d)^{\frac{p}{q}+1}\iint_G |u_n(Q)-u(Q)|^p dQ, \qquad (12)$$

引理证完. 同理可证函数 $A(P,Q)$ 取第二种形式的情形.

今设函数 $\varphi(P)$ 有所有 l 阶广义导数. 那么存在 l 次连续可微函数列 $\{\varphi_m(P)\}$ 使 $\varphi_m(P)$ 平均收敛于 $\varphi(P)$ 且 $\dfrac{\partial^l\varphi_m}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}$ 平均收敛于 $\dfrac{\partial^l\varphi}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}$ 对所有 $l_1,\ l_2=0,\ 1,\cdots l,\ l_1+l_2=l$. 依 Соболев 公式

$$\varphi_m(P)=\sum_{k=0}^{l-1}\sum_{l_1+l_2=k}C_{l_1l_2}^{(k)}(P)\iint_G\varphi_m(Q)\frac{\partial^k\omega_R}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}dQ$$
$$+\sum_{l_1+l_2=l}\iint_G A_{l_1l_2}^{(l)}(P,Q)\frac{\partial^l\varphi_m}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}dQ.$$

再由引理, 我们可以在出现于这个公式的积分之下求极限且由此得出

$$\varphi(x,\ y)=\sum_{k=0}^{l-1}\sum_{l_1+l_2=k}C_{l_1l_2}^{(k)}(P)\iint_G\varphi(Q)\frac{\partial^k\omega_R}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}dQ$$
$$+\sum_{l_1+l_2=l}\iint_G A_{l_1l_2}^{(l)}(P,\ Q)\frac{\partial^l\varphi}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}dQ. \qquad (13)$$

这就是说, 我们推广了 Соболев 公式于空间 $W_p^{(l)}$ 的函数的情形.

嵌入定理 (Соболев)　对任意 $k<l$, 空间 $W_p^{(l)}$ 含于空间 $W_p^{(k)}$. 这就是说具有所有 l 阶广义导数的任一函数 $\varphi(x,y)$ 对 $k<l$ 也具有所有 k 阶广义导数而且

$$\|\varphi\|_{W_p^{(k)}}\leqslant C_k\|\varphi\|_{W_p^{(l)}}.$$

设 $\varphi(x,y)\in W_p^{(l)}$ 且设 $\{\varphi_n(x,y)\}$ 是一列 l 次连续可微函数使

$$\varphi_n(x,y)\to\varphi(x,y),\qquad \frac{\partial^l\varphi_n}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}\to\varphi^{(l_1,l_2)}(x,y)$$

在 L_p 的距离意义下成立. 对 $\frac{\partial^{l-1}\varphi_n}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}}$ 应用 Соболев 积分公式得

$$\frac{\partial^{l-1}\varphi_n}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}} = \iint_G \omega_R(Q)\frac{\partial^{l-1}\varphi_n}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}}dQ + \sum_{l_1+l_2=1}\iint_G A^{(1)}_{l_1l_2}(P,Q)\frac{\partial^l\varphi_n}{\partial x^{k_1+l_1}\partial y^{k_2+l_2}}dQ.$$

依 Green 公式变换第一积分可得

$$\frac{\partial^{l-1}\varphi_n}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}} = (-1)^{l-1}\iint_G \varphi_n(Q)\frac{\partial^{l-1}\omega_R}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}}dQ + \sum_{l_1+l_2=1}\iint_G A^{(1)}_{l_1l_2}(P,Q)\frac{\partial^l\varphi_n}{\partial x^{k_1+l_1}\partial y^{k_2+l_2}}dQ. \tag{14}$$

由引理 2 知等式(14)右端趋于某一极限

$$\chi(P) = \iint_G \varphi(Q)\frac{\partial^{l-1}\omega_R}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}}dQ + \sum_{l_1+l_2=1}\iint_G A^{(1)}_{l_1l_2}(P,Q)\varphi^{(k_1+l_1,k_2+l_2)}(Q)dQ. \tag{15}$$

但这就是说

$$\varphi_n(x,y)\xrightarrow{L_p(G)}\varphi(x,y),\quad \frac{\partial^{(l-1)}\varphi_n}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}\xrightarrow{L_p(G)}\chi(x,y),$$

换言之, $\chi(x,y)$ 正是函数 $\varphi(x,y)$ 的 $(l-1)$ 阶广义导数. 这就证明了$(l-1)$阶广义导数存在.

由$(l-1)$阶广义导数的存在随之而来的是$(l-2)$阶广义导数的存在,其余类推. 定理的第一部分证完.

用借助 l 阶广义导数及函数自身表示 $(l-1)$ 阶广义导数的公式(15)有

$$\frac{\partial^{l-1}\varphi}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}}=(-1)^{l-1}\iint_G \varphi(Q)\,\frac{\partial^{l-1}\omega_R}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}}\,dQ$$

$$+\sum_{l_1+l_2=1}\iint_G A_{l_1l_2}^{(1)}(P,Q)\,\frac{\partial^l\varphi}{\partial x^{k_1+l_1}\partial y^{k_2+l_2}}\,dQ.$$

利用显然的不等式

$$(a_1+a_2+\cdots+a_\nu)^p\leqslant \nu^p(a_1^p+a_2^p+\cdots+a_\nu^p),$$

$$a_i>0,$$

可得

$$\left|\frac{\partial^{l-1}\varphi}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}}\right|\leqslant 3^p\left\{\left(\iint_G|\varphi(Q)|\left|\frac{\partial^{l-1}\omega_R}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}}\right|dQ\right)^p\right.$$

$$\left.+\sum_{l_1+l_2=1}\left(\iint_G|A_{l_1l_2}^{(1)}(P,Q)|\left|\frac{\partial^l\varphi}{\partial x^{k_1+l_1}\partial y^{k_2+l_2}}\right|dQ\right)^p\right\}.$$

再由 Hölder 不等式

$$\left(\iint_G|\varphi(Q)|\left|\frac{\partial^{l-1}\omega_R}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}}\right|dQ\right)^p\leqslant a\iint_G|\varphi(Q)|^p dQ,$$

其中 a 为一常数．重复使用前述引理可得

$$\iint_G\left(\iint_G|A_{l_1l_2}^{(1)}(P,Q)|\left|\frac{\partial^l\varphi}{\partial x^{k_1+l_1}\partial y^{k_2+l_2}}\right|dQ\right)^p dP$$

$$\leqslant a_{l_1l_2}^{(1)}\iint_G\left|\frac{\partial^l\varphi}{\partial x^{k_1+l_1}\partial y^{k_2+l_2}}\right|^p dQ,$$

其中 $a_{l_1l_2}^{(l)}$ 也是常数．

利用这些不等式得出

$$\iint_G\left|\frac{\partial^{l-1}\varphi}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}}\right|^p dP$$

$$\leqslant b_{k_1k_2}^{(l-1)}\left\{\iint_G|\varphi(Q)|^p dQ+\sum_{l_1+l_2=1}\iint_G\left|\frac{\partial^l\varphi}{\partial x^{k_1+l_1}\partial y^{k_2+l_2}}\right|^p dQ\right\}$$

$$\leqslant b_{k_1k_2}^{(l-1)}\left\{\iint_G|\varphi(Q)|^p dQ+\sum_{l_1+l_2=l}\iint_G\left|\frac{\partial^l\varphi}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}\right|^p dQ\right\}.$$

由此对所有$(l-1)$阶导数求这个不等式的和，可知对适当选择的常数有

$$\iint_G |\varphi(Q)|^p dQ + \sum_{k_1+k_2=l-1} \iint_G \left|\frac{\partial^{l-1}\varphi}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}}\right|^p dQ$$

$$\leqslant A^p \left\{\iint_G |\varphi(Q)|^p dQ + \sum_{l_1+l_2=l} \iint_G \left|\frac{\partial^l \varphi}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}\right|^p dQ\right\}.$$

由此得出所要不等式

$$\|\varphi\|_{W_p^{(l-1)}} \leqslant A\|\varphi\|_{W_p^{(l)}}.$$

定理全部证毕.

关于 Соболев 嵌入定理的全面的论述可以参考[30].

第三章 线性算子

一类最重要的而且非常深入研究过的算子是定义在线性空间内的线性算子.

§1 线性算子

定义 设给定两个同时为实或复的线性拓扑空间，E_x 和 E_y. 并设给定一个定义在 E_x 上且值域含于 E_y 内的算子 $y = A(x)$. 我们也常把它记成 $y = Ax$. 算子 $y = Ax$ 称为线性的，如果

1）这个算子可加，即是说对 E_x 内所有 x_1 和 x_2，

$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2, \tag{1}$$

2）算子 A 是齐性的，即是说对所有 $x \in E_x$ 和任意实数(如果 E_x 为实空间)或复数(如果 E_x 为复空间) λ，

$$A(\lambda x) = \lambda Ax,$$

将来我们用记号$(E_x \to E_y)$代表映 E_x 于 E_y 内的所有线性连续算子的集.

显然，对于距离空间的情形算子 A 的连续性是说，任给 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 使得球 $S(x, \delta)$ 的所有元的象含于 $S(Ax, \varepsilon)$.

例 1. 考虑 n 阶正方矩阵 $(a_{ik})i, k = 1, \cdots n$. 等式

$$n_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\xi_k \quad (i = 1, \cdots, n)$$

显然定义了某一算子 $y = Ax$ 映 n 维欧氏空间 E_n 的元 $x=$

$\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$ 于同空间的元 $y = \{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n\}$.

A 是线性连续算子. 事实上,算子 A 的可加性由等式

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(\xi_k^{(1)} + \xi_k^{(2)}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\xi_k^{(1)} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\xi_k^{(2)},$$

$$i = 1, \cdots n,$$

得出,而它等价于等式

$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2.$$

至于算子的齐性则是显然的. 算子的连续性可由 Cauchy-Буняковский 不等式

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\eta_i^{(m)} - \eta_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2}\ \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(\xi_k^{(m)} - \xi_k)^2}$$

得出,式中

$$x_m = \{\xi_k^{(m)}\},\ y_m = Ax_m = \{\eta_i^{(m)}\},\ x_m \to x.$$

例 2. 令

$$y(t) = \int_0^1 K(t, s)x(s)ds,$$

其中 $K(t, s)$ 在正方形 $0 \leqslant t, s \leqslant 1$ 内连续. 如果 $x(t) \in C[0, 1]$,那么显然 $y(t) \in C[0, 1]$. 从而算子 $y = Ax$ 映空间 $C[0, 1]$ 于其自身. 不难验证 A 是线性连续算子. 事实上,

$$\text{a)}\quad A(x_1 + x_2) = \int_0^1 K(t, s)[x_1(s) + x_2(s)]ds$$

$$= \int_0^1 K(t, s)x_1(s)ds + \int_0^1 K(t, s)x_2(s)ds$$

$$= Ax_1 + Ax_2,$$

所以 A 是可加的.

b) A 的齐性是显然的.

c) 设 $\{x_n(t)\}$ 在空间 $C[0, 1]$ 的意义下收敛于 $x(t)$, 即

是说在[0，1]上一致收敛．因为在一致收敛意义下可在积分号下求极限，所以

$$\lim_n \int_0^1 K(t,s)x_n(t)ds = \int_0^1 K(t,s)x(s)ds,$$

即 $\lim_n Ax_n = Ax$，这就证明了算子 A 的连续性．

例 3．设 E_x 代表给定在具有连续曲率的平面闭曲线 Γ 上的连续函数的全体，距离定义为

$$\rho(x_1, x_2) = \max_\Gamma |x_1(t) - x_2(t)|.$$

令 E_u 代表给定在由 Γ 所包围的闭区域 G 内的二元连续函数的全体．在其内距离定义为

$$\rho(u_1, u_2) = \max_G |u_1(\xi, \eta) - u_2(\xi, \eta)|.$$

对每一函数 $x(t) \in E_x$ 使函数 $u(\xi, \eta) \in E_u$ 与之对应，其中 $u(\xi, \eta)$ 是对区域 G 的满足边界条件 $x(t)$ 的 Dirichlet 问题的解．如所熟知，在所给的假定下这个问题是唯一可解的．我们这样得到的对应定义了某一算子 $u = Ax$．由调和函数的已知性质知 A 是定义在 E_x 上且值域含于 E_u 内的线性连续算子．

4．设 $E = C[0,1]$．在此空间讨论由下面的等式定义的算子 $y = Ax$

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau.$$

A 显然是线性连续算子定义在整个 E 上．在同一空间内讨论另一个由等式

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

定义的算子 $y = Bx$．这个算子已经不是对所有 $x(t) \in E$ 被定义的，而且即使 Bx 存在也不一定有 $y \in E$．但是如果把算子 B 的定义域取做具有连续导数(在 $C[0,1]$ 内是稠密的)的

所有函数所组成的线性流形，那么算子 B 的值域也含于 $C[0,1]$.

算子 B 显然是可加的和齐性的. 但这个算子在其定义域内不是连续的，因为一致收敛函数序列的极限函数的导数不一定等于这个序列的函数的导数的极限，尽管所有这些导数都存在且连续.

简单性质 设 A 为连续线性算子. 令 $x=\xi+\zeta$，那么 $\zeta=x-\xi$. 于是 $Ax=A\xi+A\zeta=A\xi+A(x-\xi)$. 由此得

$$A(x-\xi)=Ax-A\xi. \tag{2}$$

在(2)中令 $x=\xi$. 由此得

$$A(0)=Ax-Ax=0.$$

在(2)中令 $x=0$ 可得

$$A(-\xi)=-A\xi.$$

定理 1 定义在线性实空间 E_x 上且其值域含于线性实空间 E_y 内的可加算子 $y=Ax$ 若在一点 $x_0\in E_x$ 连续，那么它在整个空间 E_x 上连续.

设在 E_x 内任给 x，且 $x_n\to x$. 于是 $x_n-x+x_0\to x_0$. 既然 A 在 x_0 连续所以

$$\lim_n A(x_n-x+x_0)=Ax_0.$$

但由可加性

$$A(x_n-x+x_0)=Ax_n-Ax+Ax_0.$$

因此
$$\lim_n Ax_n-Ax+Ax_0=Ax_0$$

由此得出
$$\lim_n Ax_n=Ax.$$

定理 2 定义在实空间 E_x 上可加连续算子 Ax 必为齐性的.

先设 $t=n$ 为正整数．于是

$$A(nx)=Ax+Ax+\cdots+Ax=nAx.$$

再令 $t=m$ 为负整数．于是

$$A(mx)=-A(-mx)=-(-m)Ax=mAx.$$

令 $t=\frac{m}{n}$ 为有理数．我们有

$$A\left(\frac{m}{n}x\right)=mA\left(\frac{1}{n}x\right).$$

设 $\frac{1}{n}x=\xi$．于是 $x=n\xi$ 且

$$Ax=A(n\xi)=nA\xi=nA\left(\frac{1}{n}x\right).$$

由此 $A\left(\frac{1}{n}x\right)=\frac{1}{n}Ax$，从而

$$A\left(\frac{m}{n}x\right)=mA\left(\frac{1}{n}x\right)=\frac{m}{n}Ax.$$

最后设 t 为任一实数．只须考虑 t 为无理数的情形．那么存在有理数列$\{r_n\}$使 $r_n\to t$．由此也有 $\lim\limits_{n} r_nx=tx$．既然A为连续的，所以

$$A(tx)=A(\lim_n r_nx)=\lim_n A(r_nx)=\lim_n r_nAx=tAx.$$

算子空间　对于定义在线性空间 E_x 上且其值域含于线性空间E_y内连续线性算子所成的集内可以引入代数运算．设A和B是这样两个算子．由下述公式定义这两个算子的加法

$$(A+B)x=Ax+Bx,$$

并用下述公式定义A与数的乘法

$$(\lambda A)x=\lambda(Ax).$$

显然对于这样的定义就使得线性算子的集构成一个线性空

间，在此空间内的零元将是算子 O，它对任一 $x \in E$ 都有 $Ox = 0$。在此空间内我们定义序列的极限。例如我们说 $A_n \to A$，如果对任一 $x \in E_x$ 有

$$\lim_n A_n x = Ax.$$

今后将对空间 E_x 和 E_y 作一些补充假设后对上述算子空间更加详细地来讨论.

连续线性算子环 今取某一线性空间 E，并讨论定义在 E 上且其值域于同一空间 E 内的所有连续线性算子的集 $(E \to E)$. 有如上述，这些算子构成一个线性空间. 现在还可对 $(E \to E)$ 内的算子 A 和 B 由下述公式定义它们的积

$$(AB)x = A(Bx).$$

不难证明此积仍为一连续线性算子. 我们可归纳地定义任意个算子的积. 特别，我们记

$$AA = A^2, \quad A^2A = A^3, \cdots$$

也容易验证 $(AB)C = A(BC)$，$(A + B)C = AC + BC$，且 $C(A + B) = CA + CB$. 之外还存在由等式

$$Ix = x$$

定义的单位算子 I，其中 x 为任意的. 此算子满足

$$AI = IA = A$$

对任意算子 A.

由此我们证明了集 $(E \to E)$ 构成一个具有单位元的环。此环不一定为可换的，因为一般说来

$$AB \neq BA.$$

例. 设 $E = C[0, 1]$. 考虑算子

$$y(t) = \int_0^1 tsx(s)ds = Ax$$

和

$$y(t) = tx(t) = Bx.$$

我们有

$$ABx = \int_0^1 tssx(s)ds = t\int_0^1 s^2x(s)ds,$$

$$BAx = t\int_0^1 tsx(s)ds = t^2\int_0^1 sx(s)ds.$$

因此 $AB \neq BA$.

非常重要的是逆算子的概念. 根据环的逆元的一般定义，连续线性算子 B 称为线性算子 A 的一个左逆元，如果 $BA = I$. 完全同理，连续线性算子 C 称 A 的右逆元，如果 $AC = I$. 如果算子 A 既有一个左逆元 B 同时又有一个右逆元 C,那么它们必然相等,因为

$$B = B(AC) = (BA)C = C.$$

在此情形下,我们说算子 A 具有逆算子,并用 A^{-1} 代表它. 因此,如果 A^{-1} 存在，那么 $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. 关于逆算子的概念我们以后还要谈到.

算子函数 算子

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{n\text{个}}$$

是一个最简单的算子函数的例子. 这个算子函数是一个更一般的算子函数,即算子多项式

$$p_n(A) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_nA^n$$

的特例. 较之算子多项式更为复杂的算子函数 $f(A)$ 的定义可用不同的方式去实现.

例如设 E 为 n 维欧氏空间. A 为映 E 于其自身且由对称矩阵 $\mathfrak{A}$ 给定的算子. 利用么范变换 U 把 $\mathfrak{A}$ 化为对角形:

$$U\mathfrak{A}U^{-1} = \Lambda,$$

其中

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

今设 $f(t)$ 为任一定义在区间$[m, M]$上的函数，其中 $m = \min_i \lambda_i$，$M = \max_i \lambda_i$。令

$$f(\Lambda) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & 0 \cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots f(\lambda_n) \end{pmatrix},$$

再令

$$f(\mathfrak{U}) = U^{-1}f(\Lambda)U.$$

这样对定义在区间 $[m, M]$ 上的每一函数 $f(t)$ 总有一矩阵函数 $f(\mathfrak{U})$ 与之对应. 显然对函数 $f(t) = 0$ 有零矩阵与之对应，对函数 $f(t) = 1$ 有单位矩阵与之对应且与 $f(t) = t^m$ 对应的为 $\mathfrak{U}^m$. 此外，若

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

那么

$$f(\mathfrak{U}) = f_1(\mathfrak{U}) + f_2(\mathfrak{U}),$$

又若 $\varphi(t) = f_1(t)f_2(t)$，那么 $\varphi(\mathfrak{U}) = f_1(\mathfrak{U})f_2(\mathfrak{U})$. 这些等式可由对任两个矩阵 B 和 C 有

$$U(B + C)U^{-1} = UBU^{-1} + UCU^{-1},$$

$$U(BC)U^{-1} = (UBU^{-1})(UCU^{-1}),$$

及 $\qquad f(\Lambda) = f_1(\Lambda) + f_2(\Lambda), \quad \varphi(\Lambda) = f_1(\Lambda)f_2(\Lambda)$

成立这一事实得出.

也可以由另外方法构造矩阵函数的理论，即由矩阵多项式转到矩阵幂级数. 但是由这种方法仅能定义矩阵解析函数. 沿这个方向的深入研究归于 А. И. Лаппо-Данилевский，他并应用矩阵解析函数去研究微分方程组[19]. 利用把矩阵化为对角线形去研究矩阵函数的方法已推广到无穷矩阵的情形，且之后于 Hilbert 空间内任一自伴算子的谱理论(见第七

章§5).

作为第二个例子，我们考虑微分算子的函数. 设 $E=C[0,1]$. 且令 $D=\frac{d}{dt}$ 代表微分算子,此算子对每一连续可微函数 $x(t)$ 使此函数的导数

$$Dx(t)=\frac{d}{dt}x(t)$$

与之对应. 对 n 次连续可微函数 $x(t)$ 表达式

$$p_n(D)x(t)=a_0x(t)+a_1\frac{dx(t)}{dt}+\cdots+a_n\frac{d^nx(t)}{dt^n}$$

有意义，其中 $p_n(s)$ 为变量 s 的任一 n 次多项式. 对无穷可微函数表达式

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nD^nx(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{d^nx(t)}{dt^n}$$

有意义，如果等式右边收敛且其和仍属于 $C[0,1]$ 的话. 特别，如果 $x(t)$ 为 m 次多项式的话，那么上式成立，这是因为 $D^nx(t)=0$ 对 $n>m$ 从而此级数成为有限和.

微分算子的多项式在线性微分方程理论中找到应用. 这些应用中最简单的是所谓解具有常数系数方程的符号法. 微分算子函数的更深入的对线性常微分方程和偏微分方程的应用包括在所谓的运算微积理论内[11].

微分算子函数的级数在 XIX 世纪前半期曾广泛应用于求积理论，插值理论等某些公式的推导. 我们用例子来说明.

首先，算子

$$I+hD+\frac{h^2D^2}{2!}+\frac{h^3D^3}{3!}+\cdots+\frac{h^nD^n}{n!}+\cdots=e^{hD}$$

当它应用于看作解析的函数 $x(t)$ 时得出 $x(t+h)$. 事实

上，

$$e^{hD}x(t) = x(t) + hx'(t) + \frac{h^2}{2!}x''(t) + \cdots + \frac{h^n}{n!}x^{(n)}(t) + \cdots = x(t+h).$$

因此如果用 Δ_h 代表其差为 h 的差分算子

$$\Delta_h x(t) = x(t+h) - x(t)$$

时，那么

$$e^{hD}x(t) = x(t+h) = x(t) + \Delta_h x(t) = (I + \Delta_h)x(t),$$

或
$$I + \Delta_h = e^{hD}.$$

求形式逆得出

$$hD = \ln(I + \Delta_h) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\Delta_h^n}{n}.$$

这样我们就得出 Gregory 公式，它用差分算子表达微分算子

再考虑算子

$$Jx(t) = \int_0^1 x(t+\tau)d\tau \ \text{和}\ Sx(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i x(t+\tau_i),$$

其中 $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$. 不难证实算子 J 和 S 可表为算子 D 的函数，即是说

$$J = \int_0^1 e^{\tau D}d\tau = \frac{e^D - I}{D},\ S = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\tau_i D}.$$

由此

$$J - S = J[I - J^{-1}S] = J\left[I - \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{De^{\tau_i D}}{e^D - 1}\right].$$

但

$$\frac{ze^{\alpha z}}{e^z - 1}$$

是 Bernoulli 多项式的母函数:

$$\frac{ze^{\alpha z}}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} B_k(\alpha).$$

因此前述公式取如下形式

$$J - S = J\left[I - \sum_{i=1}^{n} c_i\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!} B_k(\tau_i)\right)\right]$$

$$= -J\left[\sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D^k}{k!} B_k(\tau_i)\right],$$

这是由于

$$\sum_{i=1}^{n} c_i B_0(\tau_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i = 1.$$

因为

$$J[D^k x(t)] = \int_0^1 x^{(k)}(t+\tau)d\tau$$
$$= x^{(k-1)}(t+1) - x^{(k-1)}(t),$$

由此我们得出一般 Euler-Maclaurin 公式

$$\int_0^1 x(t+\tau)d\tau = \sum_{i=1}^{n} c_i x(t+\tau_i)$$
$$- \sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{B_k(\tau_i)}{k!}\right]$$
$$\times [x^{(k-1)}(t+1) - x^{k-1}(t)].$$

特别,当 $t = 0$ 时得

$$\int_0^1 x(\tau)d\tau = \sum_{i=1}^{n} c_i x(\tau_i) - \sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{B_k(\tau_i)}{k!}\right]$$
$$\times [x^{(k-1)}(1) - x^{(k-1)}(0)].$$

上面推导的 Gregory 公式以及 Euler-Maclaurin 应该认

为是有根据的，如果在这些公式中出现的函数 $x(t)$ 是多项式的话. 因为在此情形下无穷级数成为有限和，所以我们所引入的所有形式变换都是合法的. 对无穷可微函数来说，这些公式必须有另外的依据，例如对余项的估值.

§2 线性赋范空间内的线性算子

设 E_x 和 E_y 为线性赋范空间. 因为线性赋范空间是线性拓扑空间的特殊情形，所以对线性赋范空间来说，前述的给定在 E_x 上其值域于 E_y 内的线性算子的定义以及定理 1 和 2 仍然有效.

我们注意一下，在空间 E_x 和 E_y 内的收敛是依范数收敛，所以算子 A 的连续性是说

$$\|Ax_n - Ax\| \to 0 \quad 当 \quad \|x_n - x\| \to 0.$$

在 §1 的例 1 和例 2 谈到的算子是线性连续算子依次变换线性赋范空间 E_n 及 $C[0, 1]$ 于其自身. 例 3 的算子也是线性连续算子，它变换沿 Γ 给定的连续函数所组成的线性赋范空间于在区域 G 内调和的函数所组成的线性赋范空间. 这时这两个空间的范数依次为

$$\|x\| = \max_{\Gamma} |x(t)| \quad 和 \quad \|u\| = \max_{G} |u(\xi, \eta)|.$$

我们再举一个线性算子的例子.

考虑满足下述条件的无穷矩阵 (a_{ik}), $i, k = 1, 2\cdots$, 即

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ij}|^q < \infty \quad q > 1.$$

于是通过方程组

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_k \quad i = 1, 2, \cdots$$

使每一元 $x=\{\xi_i\}\in l_p$ 有一元 $y=\{\eta_i\}\in l_q$ 与之对应。这样我们就定义了一个给定在 l_p 上其值域于 l_q 的线性连续算子 $y=Ax$，其中 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$。换句话说 $A\in(l_p\to l_q)$。

首先证明 $x\in l_p$ 时有 $y\in l_q$。利用对和的 Hölder 不等式

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^q&=\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}\xi_k\right|^q\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\}^q\\&=\|x\|^q\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|^q\leqslant\|x\|^q\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|^q.\end{aligned}$$

既然这个不等式对任意 n 成立，所以令 $n\to\infty$ 时，可得

$$\|y\|^q=\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^q\leqslant\|x\|^q\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|^q,$$

这就是说 $y\in l_q$。

再证 A 是线性连续算子。令

$$x_1=\{\xi_i^{(1)}\}\in l_p,\quad x_2=\{\xi_i^{(2)}\}\in l_p.$$

于是由等式

$$\sum_{i=1}^{\infty}a_{ik}(\xi_k^{(1)}+\xi_k^{(2)})=\sum_{i=1}^{\infty}a_{ik}\xi_k^{(1)}+\sum_{i=1}^{\infty}a_{ik}\xi_k^{(2)}$$

可得
$$A(x_1+x_2)=Ax_1+Ax_2,$$
即 A 是可加的。至于 A 的齐性也是显然的。兹设

$$x_n=\{\xi_i^{(n)}\}\quad 和\quad x=\{\xi_i\}\in l_p,$$

$$Ax_n=y_n=\{\eta_i^{(n)}\},\quad Ax=y=\{\eta_i\}\in l_q.$$

我们有

$$\|y_n - y\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i^{(n)} - \eta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_k^{(n)} - \xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^q\right)^{\frac{1}{q}} \|x_n - x\|.$$

由此可知当 $\|x_n - x\| \to 0$ 时

$$\|y_n - y\| \to 0.$$

这就证明了算子 A 的连续性.

算子 A 称为有界的，如果存在这样一个常数 M 使 $\|Ax\| \leqslant M\|x\|$ 对所有 $x \in E_x$ (在此范数 $\|Ax\|$ 是依空间 E_y 的范数来取的，而 $\|x\|$ 则为空间 E_x 的范数).

依这个定义，有界算子映有界集 $\{x\} \subset E_x$ 于有界集 $\{Ax\} \subset E_y$.

定理 1 为使可加齐性算子 A 是连续的，必须且只须它是有界的.

必要性. 设 A 为连续的. 如果它无界，那么存在序列 $\{x_n\}$ 使

$$\|Ax_n\| > n\|x_n\|.$$

令
$$\xi_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$$

那么 $\xi_n \to 0$，这是因为

$$\|\xi_n\| = \frac{1}{n\|x_n\|} \|x_n\| = \frac{1}{n} \to 0, \quad 当\ n \to \infty.$$

在另一方面

$$\|A\xi_n\| = \frac{1}{n\|x_n\|} \|Ax_n\| > 1$$

所以
$$A\xi_n \not\to A0 = 0.$$

这就是说 A 在零点不连续，与假设矛盾.

充分性. 设可加算子 A 有界，即

$$\|Ax\| \leqslant M\|x\|,$$

令 $x_n \to x$，即 $\|x_n - x\| \to 0$，于是

$$\|Ax_n - Ax\| = \|A(x_n - x)\| \leqslant M\|x_n - x\| \to 0$$

即 $Ax_n \to Ax$，从而 A 连续.

现在我们证明一个引理，以后要用到它.

引理 设给定线性算子 A（不一定有界）映 Banach 空间 E_x 于 Banach 空间 E_y 内. 令 E_n 代表满足

$$\|Ax\| \leqslant n\|x\|$$

的 $x \in E_x$ 的集. 于是

$$E_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

且至少有一集 E_n 在 E_x 稠密.

首先每一集 E_n 非空，例如 $0 \in E_n$ 对每一 n. 此处显然每一 $x \in E_x$，$x \neq 0$ 至少含于一个 E_n. 为此只须取 n 为超过 $\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ 的最小自然数即可. 因此可写

$$E_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

由于完备空间 E_x 不可能是可数个到处不稠的集的并（第一章 §6 定理 3），所以至少有一集 E_{n_0} 不是到处不稠的. 从而存在一个球 $S(x_0, r)$ 使得 $S(x_0, r) \cap E_{n_0}$ 在其内稠密.

考虑一个球 $\bar{S}(x_1, r_1)$ 完全含于 $S(x_0, r)$ 内部且 $x_1 \in E_{n_0}$. 取任意 x 其范数 $\|x\| = r_1$. 那么元 $x_1 + x \in \bar{S}(x_1, r_1)$，这是因为

$$\|(x_1 + x) - x_1\| = r_1.$$

由于 $\bar{S}(x_1, r_1) \subset \bar{E}_{n_0}$，所以存在 $S(x_1, r_1) \cap E_{n_0}$ 的元列 $\{z_k\}$ 使当 $k \to \infty$ 时 $z_k \to x_1 + x$（这个序列可能是驻序列如果 $x_1 + x \in E_{n_0}$），从而我们有

$$x_k = z_k - x_1 \to x.$$

这时不妨设

$$\frac{r_1}{2} \leqslant \|x_k\|$$

这是因为 $x_k \to x$ 且 $\|x\| = r_1$，此外 $\|x_k\| \leqslant r_1$.

由于 z_k 和 $x_1 \in E_{n_0}$，所以

$$\|Ax_k\| = \|Az_k - Ax_1\| \leqslant \|Az_k\| + \|Ax_1\|$$
$$\leqslant n_0(\|z_k\| + \|x_1\|).$$

此外 $\|z_k\| = \|x_k + x_1\| \leqslant \|x_k\| + \|x_1\| \leqslant r_1 + \|x_1\|$.

因此

$$\|Ax_k\| \leqslant n_0(r_1 + 2\|x_1\|)$$
$$\leqslant \frac{2n_0(r_1 + 2\|x_1\|)}{r_1}\|x_k\|.$$

令 n 代表超过

$$\frac{2n_0(r_1 + 2\|x_1\|)}{r_1}$$

的最小整数．于是

$$\|Ax_k\| \leqslant n\|x_k\|,$$

这就是说，所有 $x_k \in E_n$.

由此具有范数为 r_1 的任一元 x 可由 E_n 的元逼近．今设 x 为 E_x 的任一元．考虑元

$$\xi = r_1 \frac{x}{\|x\|}.$$

我们有 $$\|\xi\| = r_1.$$

由已证，存在元列 $\{\xi_k\}\subset E_n$ 收敛于 ξ. 于是

$$x_k=\xi_k\frac{\|x\|}{r_1}\to x,$$

$$\|Ax_k\|=\frac{\|x\|}{r_1}\|A\xi_k\|\leqslant\frac{\|x\|}{r_1}n\|\xi_k\|=n\|x_k\|,$$

由此可知

$$x_k\in E_n$$

这就是说 E_n 在 E_x 稠密，引理证毕.

如果说在任一 Banach 空间内线性算子可能不连续的话，那么可以证明在有穷维空间内每一线性算子都是连续的.

事实上，设 $e_1\cdots,e_n$ 为 E 的一个基，那么这个空间的任一元 x 可以写成 $x=\sum_{i=1}^{n}\xi_ie_i$. 由于任一 n 维 Banach 空间同胚于 n 维欧氏空间，所以如果

$$x_k=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^{(k)}e_i\to x=\sum_{i=1}^{n}\xi_ie_i,$$

那么 $\xi_i^{(k)}\to\xi_i$ $i=1,\cdots,n$. 但这时

$$Ax_k=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^{(k)}Ae_i\to\sum_{i=1}^{n}\xi_iAe_i=Ax,$$

这就是所要证明的.

算子的范数 设 A 为有界算子. 满足条件

$$\|Ax\|\leqslant M\|x\|$$

的常数 M（由于 A 的有界性，这样的常数当然存在）中的最小者称为**算子 A 的范数**，并用 $\|A\|$ 代表它. 因此依定义数 $\|A\|$ 具有下述两个性质：

a) 对任一 $x\in E_x$

$$\|Ax\|\leqslant\|A\|\|x\|,\tag{1}$$

b) 对任一 $\varepsilon>0$ 存在元 x_ε 使

$$\|Ax_\varepsilon\| > (\|A\| - \varepsilon)\|x_\varepsilon\|.$$

我们证明

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\| \tag{2}$$

或与之等价的等式

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}. \tag{2'}$$

事实上,若 $\|x\| \leqslant 1$,那么

$$\|Ax\| \leqslant \|A\|\|x\| \leqslant \|A\|,$$

由此

$$\sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\| \leqslant \|A\|. \tag{3}$$

在另一方面,对任意 $\varepsilon > 0$,存在元 x_ε 使

$$\|Ax_\varepsilon\| > (\|A\| - \varepsilon)\|x_\varepsilon\|.$$

令

$$\xi_\varepsilon = \frac{x_\varepsilon}{\|x_\varepsilon\|}.$$

于是

$$\|A\xi_\varepsilon\| = \frac{1}{\|x_\varepsilon\|}\|Ax_\varepsilon\| > \frac{1}{\|x_\varepsilon\|}(\|A\| - \varepsilon)\|x_\varepsilon\|$$
$$= \|A\| - \varepsilon.$$

因为 $\|\xi_\varepsilon\| = 1$, 所以

$$\sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\| \geqslant \|A\xi\varepsilon\| > \|A\| - \varepsilon.$$

由此可得

$$\sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\| \geqslant \|A\|. \tag{4}$$

由(3)和(4)得出(2).

例如我们来求具有连续核的积分算子的范数. 设

$$y(t) = \int_0^1 K(t, s)x(s)ds.$$

我们把它看成映 $C[0, 1]$ 于 $C[0, 1]$ 内的算子. 令

$$Ax = \int_0^1 K(t, s)x(s)ds.$$

我们有

$$\|Ax\| = \max_t \left|\int_0^1 K(t, s)x(s)ds\right|$$

$$\leqslant \max_t \int_0^1 |K(t,s)|ds \cdot \max_s |x(s)|$$

$$= \max_t \int_0^1 |K(t, s)|ds \cdot \|x\|.$$

由此

$$\|A\| \leqslant \max_t \int_0^1 |K(t, s)|ds. \tag{5}$$

因为 $\int_0^1 |K(t, s)|ds$ 是连续函数，所以它在区间[0，1]内某一点 t_0 达到极大值．令

$$z_0(s) = \operatorname{sign} K(t_0, s).$$

令 $x_n(s)$ 是这样连续函数使得 $\|x_n(s)\| \leqslant 1$ 且除去测度小于 $\frac{1}{2Mn}$ 的集 E_n 外到处有 $x_n(s) = z_0(s)$.

式中

$$M = \max_{t,s} |K(t, s)|.$$

在集 E_n 上到处有

$$|x_n(s) - z_0(s)| \leqslant 2,$$

我们有

$$\left|\int_0^1 K(t, s)z_0(s)ds - \int_0^1 K(t, s)x_n(s)ds\right|$$

$$\leqslant \int_0^1 |K(t, s)||x_n(s) - z_0(s)|ds$$

$$= \int_{E_n} |K(t, s)||x_n(s) - z_0(s)|ds$$

$$\leqslant 2\max_{t,s} |K(t, s)| \frac{1}{2Mn} = \frac{1}{n}.$$

这个不等式对任一 $t \in [0, 1]$ 成立.

由此对所有 $t \in [0, 1]$ 我们有

$$\int_0^1 K(t, s)z_0(s)ds \leqslant \int_0^1 K(t, s)x_n(s)ds + \frac{1}{n}$$
$$\leqslant \|A\|\|x_n\| + \frac{1}{n}.$$

在此等式中令 $t = t_0$ 我们得

$$\int_0^1 |K(t_0,s)|ds \leqslant \|A\|\|x_n\| + \frac{1}{n}.$$

因为 $\|x_n\| \leqslant 1$,在上述不等式中取 $n \to \infty$ 的极限得

$$\int_0^1 |K(t, s)|ds \leqslant \|A\|.$$

即

$$\max_t \int_0^1 |K(t, s)|ds \leqslant \|A\|. \tag{6}$$

由(5)和(6)得

$$\|A\| = \max_t \int_0^1 |K(t, s)|ds.$$

设在线性赋范空间 E_x 内给定线性流形 L.把这个线性流形独立地看成一个线性空间可能是不完备的. 设在 L 上定义了一个可加算子 A 取值于某一线性赋范空间 E_y. 算子 A 称为在 L 上有界的,如果存在常数 M 使

$$\|Ax\| \leqslant M\|x\|$$

对所有 $x \in L$. 这些常数中的最小者称为算子 A 在线性流形 L 上的范数并记作 $\|A\|_L$[1].

定理 2 设 A_0 为线性有界算子,它定义于在线性赋范空间 E_x 内到处稠密的线性流形 L 上并取值于完备线性赋范空间 E_y. 那么它可扩张成整个空间上线性有界算子而不增加范数.

换句话说,在整个空间 E_x 可定义算子 A 使

$$Ax = A_0x \quad 对 \quad x \in L$$

1) 与此相应,在整个空间上的算子的范数有时记作 $\|A\|_{E_x}$.

且 $$\|A\|_{E_x} = \|A_0\|_L.$$

设 x 为空间 E_x 的一个不属于 L 的元. 因 L 在 E_x 稠密，所以存在序列 $\{x_n\}\subset L$ 使当 $n\to\infty$ 时 $\|x_n - x\|\to 0$. 从而

$$\|x_n - x_m\|\to 0$$

对 $n, m\to\infty$. 但它蕴含

$$\begin{aligned}\|A_0x_n - A_0x_m\| &= \|A_0(x_n - x_m)\| \\ &\leqslant \|A_0\|_L\|x_n - x_m\|\to 0\end{aligned}$$

对 $n, m\to\infty$. 这就是说$\{A_0x_n\}$自收敛，从而再由 E_y 的完备性，此序列收敛于某一极限. 记此极限为 Ax. 设 $\{\xi_n\}\subset L$ 为另一序列收敛于 x. 显然有

$$\|x_n - \xi_n\|\to 0$$

从而 $\|A_0x_n - A_0\xi_n\|\to 0$. 由此 $A_0\xi_n\to Ax$. 这就是说算子 A 在 E_x 上唯一被定义. 若 $x\in L$，取 $x_n = x$ 对所有 n，那么

$$Ax = \lim_n A_0x_n = A_0x.$$

我们所构造的算子 A 是可加的，因为

$$\begin{aligned}A(x_1 + x_2) &= \lim_n A_0(x_n^{(1)} + x_n^{(2)}) \\ &= \lim_n A_0x_n^{(1)} + \lim_n A_0x_n^{(2)} \\ &= Ax_1 + Ax_2.\end{aligned}$$

此外它也是有界的，因为由不等式

$$\|A_0x_n\|\leqslant \|A_0\|_L\|x_n\|$$

取极限可得

$$\|Ax\|\leqslant \|A_0\|_L\|x\|.$$

由同一不等式可得

$$\|A\|_{E_x}\leqslant \|A_0\|_L.$$

因为对算子的扩张，范数显然不能减少，所以

$$\|A\|_{E_x} = \|A_0\|_L.$$

定理完全证毕.

上述扩张算子的方法称为依连续性扩张.

§3 线性泛函

如果算子的值域是实数,那么我们在以前说过,这样算子称为泛函,定义在线性拓扑空间上泛函的 $f(x)$ 称为线性的,如果

1) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$,

2) $f(x_n) \to f(x)$ 当在线性拓扑空间 E 的收敛意义下 $x_n \to x$ 时.

因为实数集是 B 型空间,所以对线性泛函来说,以前对线性连续算子所引入的定义以及证明的定理对它均适用.

定理 1′ 定义在线性拓扑空间 E 上的可加泛函如果在此空间一点连续,那么它在整个 E 上连续,从而是线性的.

定理 2′ 线性泛函为齐性的.

定理 3′ 为使定义在线性赋范空间 E 上的可加泛函为线性的,必须且只须它有界:

$$|f(x)| \leqslant M\|x\|.$$

满足这个不等式的常数 M 中的最小者称为泛函的范数并用 $\|f\|$ 表示,因此

$$|f(x)| \leqslant \|f\|\|x\|.$$

最后有
$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)|$$

或
$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

例 1. 设 $E = L_p[0, 1]$. 那么

$$f(x)=\int_0^1 x(t)dt$$

是线性泛函.

事实上,$f(x)$ 对任一 $x\in L_p[0,1]$ 有意义可由 Hölder 不等式

$$\left|\int_0^1 x(t)dt\right|\leqslant\left(\int_0^1|x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 dt\right)^{\frac{1}{q}}=\|x\|$$

得知. 就由这个不等式也得出 $f(x)$ 的有界性. 至于 $f(x)$ 的可加性是显然的.

例 2. 设 $E=E_k$, 即是说 E 为 k 维欧氏空间. 对此空间任一元 $x=\{\xi_i\}$ 令

$$f(x)=c_1\xi_1+c_2\xi_2+\cdots+c_k\xi_k,$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 是已知常数, 泛函 $f(x)$ 的可加性是显然的. 又因 $x_n\to x$ 是说 $\xi_i^{(n)}\to\xi_i$ 对所有 $i=1,2,\cdots,k$, 所以

$$\lim_n f(x_n)=\lim_n\sum_{i=1}^k c_i\xi_i^{(n)}=\sum_{i=1}^k c_i\xi_i=f(x),$$

这就证明了 $f(x)$ 的连续性.

线性泛函的范数可给以一个几何解释. 因为在 k 维欧氏空间内平面方程

$$c_1\xi_1+c_2\xi_2+\cdots+c_k\xi_k=c$$

可写成
$$f(x)=c,$$

所以类似地我们说任一线性空间 E 内一个**超平面**是指满足方程

$$f(x)=c$$

的点的全体,式中 f 为 E 上给定线性泛函. 超平面

$$f(x)=c_0 \quad 和 \quad f(x)=c_1$$

自然称为**平行的**.

超平面 $f(x)=c$ 分空间为两个半空间：即满足 $f(x) \leqslant c$ 的所有点 x 和满足 $f(x) \geqslant c$ 的所有点 x。我们规定称第一个半空间为位于超平面 $f(x)=c$ 的左边而第二个为位于该超平面的右边。

超平面 $f(x)=\|f\|$ 具有这样一个性质，即单位球 $\|x\| \leqslant 1$ 完全含于这个超平面左边(因为对球 $\|x\| \leqslant 1$ 的点有 $f(x) \leqslant \|f\|$)。但在另一方面决无任一平行超平面 $f(x)=\|f\|-\varepsilon$ 具有此性质。

类似于 h 维欧氏空间凸体的理论，我们说超平面 $f(x)=\|f\|$ 承托单位球 $\|x\| \leqslant 1$。

§4 线性有界算子空间

我们已经知道定义在同一线性空间 E_x 上且在线性空间 E_y 内取值的所有线性有界算子构成一个线性空间 $(E_x \to E_y)$。

如果再设 E_x 和 E_y 都是赋范空间，那么对空间 $(E_x \to E_y)$ 也可以引入范数。

事实上，对于映 E_x 于 E_y 内的每一线性有界算子 A 我们定义了范数(有如 §2 所指出的那样)。不难验证这个范数满足范数的三个公理。事实上，

1) $\|A\|=\sup\limits_{\|x\| \leqslant 1}\|Ax\| \geqslant 0$。若 $\|A\|=0$(即 $\sup\limits_{\|x\| \leqslant 1}\|Ax\|=0$)，那么 $\|Ax\|=0$ 对满足 $\|x\| \leqslant 1$ 的所有 x。再由齐性知 $Ax=0$ 对所有 x，因此 $A=0$，

2) $\|\lambda A\|=\sup\limits_{\|x\| \leqslant 1}\|\lambda Ax\|=|\lambda| \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1}\|Ax\|=|\lambda|\|A\|$，

3) $\|A+B\|=\sup\limits_{\|x\| \leqslant 1}\|Ax+Bx\|$

$$\leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Ax\| + \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Bx\|$$
$$= \|A + B\|.$$

由此可知线性有界算子空间是一线性赋范空间.

在特殊情形下，当 $E_y = R$——所有实数集时，即是说当我们讨论定义在 E_x 上线性泛函所成的空间时，我们称这个线性泛函空间为 E_x 的共轭空间，并用 E_x^* 代表它*).

定理 1 如果 E_y 是完备的，那么线性有界算子空间也是完备空间，从而是 (B) 型空间.

设给定一个自收敛线性有界算子序列 $\{A_n\}$，即是说 $\{A_n\}$ 是一个依线性算子空间的范数自收敛的序列，亦即 $\|A_n - A_m\| \to 0$ 对 n, $m \to \infty$. 于是对任意 x

$$\|A_nx - A_mx\| \leqslant \|A_n - A_m\|\|x\| \to 0$$

对 n, $m \to \infty$.

因此对每一固定 x，空间 E_y 的元列 $\{A_nx\}$ 自收敛. 既然空间 E_y 是完备的，所以序列 $\{A_nx\}$ 有某一极限 y.

因此对每一 $x \in E_x$ 有元 $y \in E_y$ 与之对应. 这样我们就得出一个算子 A 定义为 $y = Ax$. 这个算子是可加的:

$$A(x_1 + x_2) = \lim_n A_n(x_1 + x_2)$$
$$= \lim_n A_nx_1 + \lim_n A_nx_2$$
$$= Ax_1 + Ax_2.$$

我们来证明 A 是有界算子. 依假设

$$\|A_n - A_m\| \to 0$$

对 n, $m \to \infty$. 由此

$$|\|A_n\| - \|A_m\|| \to 0$$

对 n, $m \to \infty$. 即数列 $\{\|A_n\|\}$ 自收敛，从而也有界. 这就是说，存在这样一个常数 K 使得

*) 现在许多有关泛函的书或文献都称共轭空间为对偶空间. ——译者注

$$\|A_n\| \leqslant K$$

对所有 n。由此

$$\|A_n x\| \leqslant K\|x\|$$

对所有的 n. 从而

$$\|Ax\| = \lim_n \|A_n x\| \leqslant K\|x\|.$$

这就证明了 A 的有界性. 既然 A 可加且有界，所以 A 是线性有界算子.

最后再证 A 是序列 $\{A_n\}$ 依线性算子空间的范数收敛意义下极限. 对任意 $\varepsilon > 0$ 存在 n_0 使当 $n \geqslant n_0$, $p > 0$ 时

$$\|A_{n+p}x - A_n x\| < \varepsilon, \tag{1}$$

对满足 $\|x\| \leqslant 1$ 的所有 x. 在不等式(1)中令 $p \to \infty$ 得

$$\|Ax - A_n x\| \leqslant \varepsilon$$

对所有 $n \geqslant n_0$ 和范数不超一的所有 x 成立. 因此对 $n \geqslant n_0$

$$\|A_n - A\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|(A_n - A)x\| \leqslant \varepsilon,$$

即

$$A = \lim_n A_n$$

在线性有界算子空间内范数收敛意义下成立. 由此证明了这个空间的完备性.

推论 线性赋范空间 E 的共轭空间 E^* 是 Banach 空间.

算子的一致收敛与强收敛. 我们称一个线性有界算子列在线性算子空间内的范数意义下的收敛为这个算子列的一致收敛. 这一名称是根据以下事实，若 $A_n \to A$ 在范数意义收敛，那么 $A_n x \to Ax$ 对每一球 $\|x\| \leqslant r$ 一致地成立. 事实上，对给定的 $\varepsilon > 0$ 可选 n_0 使当 $n \geqslant n_0$ 时

$$\|A_n - A\| < \frac{\varepsilon}{r}.$$

于是

$$\|A_n x - Ax\| \leqslant \|A_n - A\|\|x\| < \frac{\varepsilon}{r} r = \varepsilon$$

对所有 $x \in \bar{S}(\theta, r)$，这就是所要证的．反之，如果 $A_n x \to Ax$ 在某一球 $\|x\| \leqslant r$ 上一致成立，那么 $A_n x \to Ax$ 对单位球一致成立，由此依刚才所证明的有

$$\|A_n - A\| \to 0.$$

在线性有界算子空间 $(E_x \to E_y)$ 内我们还可以引入算子序列另一收敛概念．即是说，线性有界算子序列$\{A_n\}$称为强收敛(也称按点收敛)于线性算子 A（自收敛），如果对每一固定的 x 序列$\{A_n x\}$收敛于 Ax（自收敛）．显然，由序列$\{A_n\}$的一致收敛得出这个序列的强收敛．

反之不然．而有如下例所示． 设 E 是 Hilbert 空间 H 具有正交规范系 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$． 令 A_n 代表由元 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 所产生的空间 H_n 上的射影算子．对任一 $x \in H$

$$A_n x = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i \to \sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i) e_i = x,$$

从而 $A_n \to I$ 在强收敛意义下成立．

在另一方面对 $\varepsilon_0 < 1$ 和任意 n 和 $p > 0$ 我们有

$\|A_n e_{n+1} - A_{n+p} e_{n+1}\| = \|e_{n+1}\| = 1 > \varepsilon_0$，从而$\{A_n\}$ 在单位球 $\|x\| \leqslant 1$ 内的一致收敛性不成立．

定理2 如果空间 E_x 和 E_y 都完备，那么线性有界算子空间在强收敛意义下也完备．

因为对每一 x 序列$\{A_n x\}$自收敛，所以对每一 x 存在

$$y = \lim_n A_n x.$$

这样我们就得出一个算子 $y = Ax$ 定义于 E_x 且其值域于 E_y．有如上述可以证明 A 是线性算子．至于 A 的有界性则由下述重要定理得出：

定理 3 (Banach-Steinhaus)． 如果 Banach 空间 E_x 内线性有界算子列$\{A_n\}$在每一点 x 自收敛，那么范数序列 $\{\|A_n\|\}$

有界.

假如不然，那么集$\{\|A_n x\|\}$在任意闭球 $\|x-x_0\|\leqslant\varepsilon$ 上无界．事实上，如果

$$\|A_n x\|\leqslant c$$

对所有 n 和某一闭球 $\bar{S}(x_0,\varepsilon)$ 上所有 x 成立，那么对任一$\xi\in E_x$ 元

$$x=\frac{\varepsilon}{\|\xi\|}\xi+x_0$$

属于此球，从而

$$\|A_n x\|\leqslant c\quad n=1,2,\cdots$$

或
$$\frac{\varepsilon}{\|\xi\|}\|A_n\xi\|-\|A_n x_0\|\leqslant\left\|\frac{\varepsilon}{\|\xi\|}A_n\xi+A_n x_0\right\|\leqslant c.$$

由此
$$\|A_n\xi\|\leqslant\frac{c+\|A_n x_0\|}{\varepsilon}\|\xi\|.$$

因为序列$\{A_n x_0\}$收敛，所以范数序列$\{\|A_n x_0\|\}$有界．于是

$$\|A_n\xi\|\leqslant c_1\|\xi\|,\quad n=1,2,\cdots$$

从而 $\|A_n\|\leqslant c_1$ $n=1,2,\cdots$． 而这与我们所作假设相矛盾.

今设 $\bar{S}_0(x_0,\varepsilon_0)$ 为 E_x 内任一闭球而$\{\|A_n x\|\}$在其上无界，因而存在 n_1 和元 $x_1\in\bar{S}_0$ 使

$$\|A_{n_1}x_1\|>1.$$

由于算子 A_{n_1} 的连续性，这个不等式在某一闭球 $\bar{S}_1(x_1,\varepsilon_1)\subset\bar{S}_0$ 上成立．在闭球 $\bar{S}_1$ 上序列$\{\|A_n x\|\}$仍无界，从而存在 $n_2>n_1$ 和元 $x_2\in\bar{S}_1$ 使

$$\|A_{n_2}x_2\|>2.$$

由算子 A_{n_2} 的连续性，这个不等式在某一闭球 $\bar{S}_2(x_2,\varepsilon_2)\subset\bar{S}_1$ 成立．以此类推.

不妨设 $n\to\infty$ 时 $\varepsilon_n\to 0$． 于是存在点 $\bar{x}$ 属于所有球

$\bar{S}_n(x_n, \varepsilon_n)$. 在此点上

$$\|A_{n_k}\bar{x}\| \geq k,$$

而这与序列 $\{A_n x\}$ 对每一 $x \in E_x$ 收敛这一假设相矛盾. 由此证明了定理.

再回到定理 2 的算子

$$Ax = \lim_n A_n x,$$

由 Banach-Steinhaus 定理可得

$$\|A_n x\| \leq M\|x\| \quad n = 1, 2, \cdots$$

取 $n \to \infty$ 的极限得 $\|Ax\| \leq M\|x\|$. 即算子 A 有界.

注 在 Banach-Steinhaus 定理的陈述中算子列 $\{A_n\}$ 在每一点 $x \in E_x$ 自收敛这一条件可以换成这个序列在空间每一点的有界性. 这样并不需改变定理的证明.

因此任一强自收敛的线性有界算子列的极限存在而且也是线性有界算子, 即是说, 算子空间在强收敛意义下完备.

下述定理常是有用的.

定理 4 为使算子序列 $\{A_n\}$ 强收敛于算子 A_0, 必须且只须

1) 序列 $\{\|A_n\|\}$ 有界,

2) $A_n x \to A_0 x$, 其中 x 属于其线性组合在 E_x 稠密的元的集 X.

第一条件的必要性正是上面证明的 Banach-Steinhaus 定理. 至于第二条件的必要性则是显然的.

今仅证这些条件的充分性.

设
$$M = \sup_n \|A_n\|,$$

且令 $L(X)$ 代表集合 X 的线性包. 由于算子 A_n 及 A_0 的线性

以及第二条件可知 $A_nx \to A_0x$ 对任一 $x \in L(X)$.

任取空间 E_x 的元 ξ,并设 ξ 不属于 $L(X)$. 对给定 $\varepsilon > 0$ 可定 $x \in L(X)$ 使 $\|\xi - x\| < \frac{\varepsilon}{4M}$. 我们有

$$\begin{aligned}\|A_n\xi - A_0\xi\| &\leqslant \|A_n\xi - A_nx\| \\ &\quad + \|A_nx - A_0x\| + \|A_0x - A_0\xi\| \\ &\leqslant \|A_nx - A_0x\| + (\|A_n\| + \|A_0\|)\|x - \xi\| \\ &< \|A_nx - A_0x\| + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

由于 $A_nx \to A_0x$,存在 n_0 使对 $n \geqslant n_0$

$$\|A_nx - A_0x\| < \varepsilon/2.$$

因此对 $n \geqslant n_0$ 我们有

$$\|A_n\xi - A_0\xi\| < \varepsilon,$$

定理证毕.

对插值理论的应用 上面证明的 Banach-Steinhaus 定理有很多的应用. 作为这种应用的一个例子可证下述定理.

定理 5 设在区间 [0, 1] 上给定点构成一个无穷三角矩阵

$$T = \begin{pmatrix} t_1^{(1)} & 0, & 0 \cdots \\ t_1^{(2)} & t_2^{(2)} & 0 \cdots \\ t_1^{(3)} & t_2^{(3)} & t_3^{(3)} \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \tag{2}$$

对定义在区间[0, 1]上给定的函数 $x(t)$ 构造 Lagrange 插值多项式 L_nx, 其结点为矩阵 T 的第 n 行的点

$$L_nx = \sum_{k=1}^{n} x(t_k^{(n)})l_k^{(n)}(t),$$

其中

$$l_k^{(n)}(t) = \frac{\omega_n(t)}{\omega_n'(t)(t - t_k^{(n)})}, \quad \omega_n(t) = \prod_{k=1}^{n}(t - t_k^{(n)}).$$

不论矩阵 T 怎样给定，总存在连续函数 $x(t)$ 使得当 $n\to\infty$ 时插值多项式 $L_n x$ 不一致收敛于 $x(t)$.

把 $L_n x$ 看成算子变换 $C[0,1]$ 的函数 $x(t)$ 于 $C[0,1]$ 内函数. 此外我们引入

$$\lambda_n = \max_t \lambda_n(t), \quad 其中\ \lambda_n(t) = \sum_{k=1}^{n} |l_k^{(n)}(t)|.$$

于是不难证明[22].

$$\|L_n\| = \lambda_n.$$

在另一方面由 С. Н. Бернштейн 不等式

$$\lambda_n > \frac{\ln n}{8\sqrt{\pi}}.$$

从而

$$\|L_n\| \to \infty.$$

由此立刻得出上述定理. 因为如果 $L_n x \to x$ 对所有 $x \in C[0,1]$，那么范数 $\|L_n\|$ 应有界.

§5 逆 算 子

定义 我们已经引入逆算子的概念并说明这一概念的重要性. 现在指出，与逆算子这一概念相联的是形如

$$Ax = y \tag{1}$$

的算子方程的解的存在性与唯一性的问题，式中 y 为线性空间 E 的已知元而 x 为同一空间中所求的元. 形式如(1)的方程有线性代数方程组，线性微分方程，线性积分方程和其它方程. 由此显然可见，求出已知算子的逆算子是非常重要的.

因此我们设算子 A 有逆算子 A^{-1}. 这时我们来考虑方程

(1). 令

$$x = A^{-1}y.$$

把它代入方程(1)得恒等式

$$AA^{-1}y = y,$$

即 $y = y$. 从而

$$x = A^{-1}y$$

是方程(1)的解.

今设方程(1)有另一解 x_1 存在:

$$Ax_1 = y.$$

对此在等式两边取运算 A^{-1},那么

$$x_1 = A^{-1}y = x,$$

从而解 $x = A^{-1}y$ 是唯一的.

如果算子 A 仅有右逆算子 C, 那么不难看出 $x = Cy$ 是(1)的解,但唯一性的问题则不能断定.

今设算子 A 有左逆 B. 那么如果方程(1)有解 x, 即 $Ax = y$. 那么对此方程两端在左边施以 B 可得 $x = By$, 即解是唯一的. 然而解的存在问题不能断定.

上面的分析指出逆算子(两侧的,左侧的或右侧的)不是施行于任一 $x \in E$ 而是仅仅施行于形如 Ax 的元, 即空间 E 的元的像集. 所有这些像构成一个线性流形(空间 E 的一部分). 推广上述情况我们导致逆算子更一般的定义.

设给定两个线性空间 E_x 和 E_y 并且映 E_x 于 E_y 的算子 A. 如果存在定义于 E_y 上且其值域于 E_x 内的算子 A^{-1} 使得

$$A^{-1}Ax = x \tag{2}$$

对任一 $x \in E_x$ 和

$$AA^{-1}y = y \tag{2'}$$

对任一 $y \in E_y$, 那么算子 A 和 A^{-1} 称为**互逆的**. 由此定义特

别可得

$$(A^{-1})^{-1}=A.$$

如果算子 A^{-1} 仅满足上述条件之一，那么它们依次称为 A 的左逆和右逆.

不难证明线性算子的逆算子也是线性的. 事实上,令

$$x=A^{-1}(y_1+y_2)-A^{-1}y_1-A^{-1}y_2.$$

由于 A 的可加性我们有

$$\begin{aligned}Ax&=AA^{-1}(y_1+y_2)-AA^{-1}y_1-AA^{-1}y_2\\&=(y_1+y_2)-y_1-y_2=0,\end{aligned}$$

由此 $$x=A^{-1}Ax=A^{-1}0=0,$$

即 $$A^{-1}(y_1+y_2)=A^{-1}y_1+A^{-1}y_2.$$

这就证明了算子 A^{-1} 的可加性. 同理可证算子 A^{-1} 的齐性. 然而由算子 A 在某一拓扑下的连续性一般说来得不出逆算子在同一拓扑或另一拓扑下的连续性. 即是说，线性有界算子的逆算子如果存在的话不一定为线性有界算子.

关于逆算子的定理 现在我们讲几个有关线性有界算子的逆算子存在的充分条件.

为此我们先作如下注记. 设线性有界算子 A 一对一地映 E_x 于 E_y 上,那么存在逆算子 A^{-1} 而且也是线性的. 事实上，对任一 $y\in E_y$ 存在一个且仅存在一个原像 $x\in E_x$. 今对每一 $y\in E_y$ 使其原像 $x\in E_x$ 与之对应，这样我们就得出一个算子 A^{-1}，而它依其定义的意义满足条件(2)和(2′). 由此得出 A^{-1} 的线性.

定理 1 给定映线性赋范空间 E_x 于线性赋范空间 E_y 上的线性算子 A. 并设对任一 $x\in E_x$ 满足条件

$$\|Ax\|\geqslant m\|x\|,\quad m>0, \tag{3}$$

其中 m 为某一常数，那么存在逆线性有界算子 A^{-1}.

由条件(3)可得 A 一对一地映 E_x 于 E_y 上：因为若 $Ax_1=$

y，$Ax_2 = y$，那么 $A(x_1 - x_2) = 0$．再由(3)

$$m\|x_1 - x_2\| \leqslant \|A(x_1 - x_2)\| = 0.$$

由此 $x_1 = x_2$．因此由上述存在线性算子 A^{-1}．这个算子的有界性由(3)立刻得出，因为

$$\|A^{-1}y\| \leqslant \frac{1}{m}\|AA^{-1}y\| = \frac{1}{m}\|y\|$$

对任意 $y \in E_y$．定理证毕．

考虑两个映线性赋范空间 E 于其自身的线性有界算子 A 和 B．那么乘积 AB 有意义．我们证明

$$\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|. \tag{4}$$

因为对任一 $x \in E$ 我们有

$$\|ABx\| \leqslant \|A\|\|Bx\| \leqslant \|A\|\|B\|\|x\|$$

由此得所欲证．

今设 A_n，A，B_n，$B \in (E \to E)$ 且在一致收敛意义下 $A_n \to A$，$B_n \to B$．那么 $A_nB_n \to AB$．事实上，

$$\|A_nB_n - AB\| \leqslant \|A_nB_n - A_nB\| + \|A_nB - AB\|$$
$$\leqslant \|A_n\|\|B_n - B\| + \|B\|\|A_n - A\|.$$

序列$\{\|A_n\|\}$是收敛数列，所以有界．又

$$\|A_n - A\| \to 0, \quad \|B_n - B\| \to 0$$

所以 $$\|A_nB_n - AB\| \to 0.$$

定理 2 设线性有界算子A映E于E内且$\|A\| \leqslant q < 1$．那么算子$I + A$有逆线性有界算子．

在定义于E上且在E取值的算子空间中考虑级数

$$I - A + A^2 - A^3 + \cdots + (-1)^nA^n + \cdots \tag{5}$$

因为

$$\|A^2\| \leqslant \|A\|^2$$

同理 $$\|A^n\| \leqslant \|A\|^n.$$

由此对级数(5)的部分和将有

$$\begin{aligned}
&\|S_{n+p} - S_n\| \\
&= \|(-1)^{n+1}A^{n+1} + (-1)^{n+2}A^{n+2} + \cdots + (-1)^{n+p}A^{n+p}\| \\
&\leqslant \|A\|^{n+1} + \|A\|^{n+2} + \cdots + \|A\|^{n+p} \\
&\leqslant q^{n+1} + q^{n+2} + \cdots + q^{n+p} \to 0
\end{aligned}$$

对 $n \to \infty$ 和 $p > 0$. 这就是说级数(5)的部分和序列自收敛,从而由算子空间的完备性知此级数收敛于某一极限.

设 S 为此级数的和,我们有

$$\begin{aligned}
&S(I + A) \\
&= \lim_n S_n(I + A) \\
&= \lim_n (I + A + A^2 + \cdots + A^n - A - A^2 - \cdots - A^{n+1}) \\
&= \lim_n (I - A^{n+1}) = I.
\end{aligned}$$

同理可证 $(I + A)S = I$,换句话说

$$S = (I + A)^{-1}.$$

此处也有

$$\|S\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

这就证明了 $I + A$ 有有界线性逆算子,定理证毕.

定理 3 *设算子* $A \in (E_x \to E_y)$ *有逆* A^{-1}, *且算子* $\|\Delta A\|$ *满足*

$$\|\Delta A\| < \|A^{-1}\|^{-1}.$$

那么算子 $B = A + \Delta A$ *有逆* B^{-1} *且*

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leqslant \frac{\|\Delta A\|}{1 - \|A^{-1}\|\|\Delta A\|}\|A^{-1}\|^2. \tag{6}$$

事实上

$$A + \Delta A = A(I + A^{-1}\Delta A).$$

因为 $\|A^{-1}\Delta A\| < 1$, 所以算子 $I + A^{-1}\Delta A$ 有逆

$$(I+A^{-1}\Delta A)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-A^{-1}\Delta A)^n.$$

显然 $(I+A^{-1}\Delta A)^{-1}A^{-1}$ 是算子 $A(I+A^{-1}\Delta A)=A+\Delta A$ 的逆. 此外

$$\|(A+\Delta A)^{-1}-A^{-1}\|\leqslant\|A^{-1}\|\|(I+A^{-1}\Delta A)^{-1}-I\|$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\|A^{-1}\Delta A\|^n\|A^{-1}\|=\frac{\|A^{-1}\Delta A\|}{1-\|A^{-1}\Delta A\|}\|A^{-1}\|$$

$$\leqslant\frac{\|\Delta A\|}{1-\|A^{-1}\|\|\Delta A\|}\|A^{-1}\|^2.$$

这就是所要证明的.

例. 考虑积分算子

$$Ax=x(t)-\int_0^1 K(t,s)x(s)ds, \tag{7}$$

其中 $K(t,s)$ 为连续核. 此算子映空间 $C[0,1]$ 于其自身. 设 $K_0(t,s)$ 是逼近于核 $K(t,s)$ 的降格核, 且设 A_0 是与核 $K_0(t,s)$ 对应的积分算子

$$A_0x=x(t)-\int_0^1 K_0(t,s)x(s)ds. \tag{8}$$

考虑方程

$$Ax=y \tag{7'}$$

及

$$A_0x=y. \tag{8'}$$

令

$$\omega=\max_{t,s}|K(t,s)-K_0(t,s)|.$$

若 $\Delta A=A-A_0$, 那么容易看出 $\|\Delta A\|\leqslant\omega$. 如所熟知[1], 解具有降格核的积分方积(8)还原成解线性代数方程组. 假设这个组有解,而且把它的解记成

$$x_0(t)=Ry,$$

1) 例如参考[20].

式中R代表与上述线性代数组的矩阵相逆的矩阵(r_{ij})所对应的算子. 设r是算子R的范数，于是若

$$\omega < \frac{1}{r},$$

那么由上面证明的定理，具有非降格核的积分方程(7)有解，且若$x(t)$为其解时，那么

$$\|x(t) - x_0(t)\| \leqslant \frac{\omega}{1-\omega r} r^2.$$

反之，如果已知方程(7)可解，那么定理可以用来证明具有降格核的近似方程的解的存在以及用以估计近似解的误差.

最后我们证明下述重要定理:

定理 4 (Banach) 设线性有界算子A一对一地映整个Banach空间E_x于整个Banach空间E_y上，那么存在A的逆线性有界算子A^{-1}映E_y于E_x上.

只须证明A^{-1}的有界性.

由本章§2的引理，E_y可表为

$$E_y = \bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k,$$

其中Y_k是满足

$$\|A^{-1}y\| \leqslant k\|y\|$$

的所有元$y \in E_y$的集，而且最少有一集Y_k在E_y内稠密. 设此集为Y_n.

任取一元$y \in E_y$. 令$\|y\| = l$. 我们可以找到$y_1 \in Y_n$使

$$\|y - y_1\| \leqslant \frac{l}{2}, \quad \|y_1\| \leqslant l.$$

(这是可能的，因$\bar{S}(0, l) \cap Y_n$在$\bar{S}(0, l)$稠密，且$y \in \bar{S}(0, l)$) 此外可定$y_2 \in Y_n$使

$$\|(y-y_1)-y_2\| \leqslant \frac{l}{2^2}, \quad \|y_2\| \leqslant \frac{l}{2},$$

以此类推，可构造元 $y_k \in Y_n$ 使

$$\|y-(y_1+y_2+\cdots+y_k)\| \leqslant \frac{l}{2^k}, \quad \|y_k\| \leqslant \frac{l}{2^{k-1}}.$$

由此我们得出

$$y=\lim_k \sum_{i=1}^{k} y_i.$$

令 $x_k=A^{-1}y_k$，于是

$$\|x_k\| \leqslant n\|y_k\| \leqslant \frac{nl}{2^{k-1}}.$$

序列 $\{s_k\}$，$s_k=\sum_{i=1}^{k} x_i$ 当 $k\to\infty$ 时收敛于某一元 $x\in E_x$，因为

$$\|s_{k+p}-s_p\|=\left\|\sum_{i=k+1}^{k+p} x_i\right\| \leqslant \frac{nl}{2^{k-1}}$$

且 E_x 是完备的．从而

$$x=\lim_k \sum_{i=1}^{k} x_i=\sum_{i=1}^{\infty} x_i.$$

此外

$$Ax=A\left(\lim_k \sum_{i=1}^{k} x_i\right)=\lim_k \sum_{i=1}^{k} Ax_i=\lim_k \sum_{i=1}^{k} y_i=y.$$

由此

$$\|A^{-1}y\|=\|x\|=\lim_k\left\|\sum_{i=1}^{k} x_i\right\| \leqslant \lim_k \sum_{i=1}^{k}\|x_i\|$$

$$\leqslant \sum_{i+1}^{\infty} \frac{nl}{2^{i-1}}=2nl=2n\|y\|.$$

既然 y 是 E_y 的任一元，这就证明了算子 A 的有界性，

我们指出与一线性有界算子相逆的算子即使线性，但不一定在这个空间 E_y 上被定义而只在某一线性流形上被定义而且无界. 完全同理，和一个在 E_x 内到处稠密的流形上定义的无界算子相逆的算子可能为一有界线性算子而且在整个 E_y 上被定义. 在任一 Banach 空间内对类似的情形的详细讨论已超出本书的范围现在我们仅举两个例子来作说明.

例 1. 设 $E = C[0,1]$，且

$$Ax = \int_0^t x(\tau)d\tau.$$

那么 A 为有界线性算子，但

$$A^{-1}y = \frac{d}{dt}y(t)$$

为无界算子，定义在满足 $y(0) = 0$ 的连续可微函数所成的线性流形上.

例 2. 设 $E = C[0,1]$ 且

$$Ax = \frac{d}{dt}\left\{p(t)\frac{dx}{dt}\right\} + q(t)x.$$

这是 Sturm-Liouville 无界算子，定义在满足边界条件 $x(0)= x(1) = 0$ 且二次连续可微函数所成的线性流形上. 逆算子

$$A^{-1}y = \int_0^1 G(t,\tau)y(\tau)d\tau$$

是线性有界算子定义在整个空间 $C[0,1]$ 上，式中 $G(t,\tau)$ 为 Green 函数.

依赖于参数的算子 在数学的不同分支常常遇到形如

$$Ax - \lambda x = y \quad 或 \quad (A - \lambda I)x = y \tag{9}$$

的方程，式中 A 为一线性算子且 λ 为某一参数. 随着方程(9)我们也考虑方程

$$Ax - \lambda x = 0 \quad 或 \quad (A - \lambda I)x = 0. \tag{10}$$

我们称它为与(9)相对应的**齐次方程**. 这个方程常有解 $x =$

0. 我们称这个解为平凡解.

我们设对某一 λ 算子 $A-\lambda I$ 有逆 $(A-\lambda I)^{-1}=R_\lambda$. 那么对此 λ 方程(9)关于任一 y 有唯一解

$$x = R_\lambda y.$$

齐次方程(2)这时仅有平凡解 $x=0$.

如果$(A-\lambda I)$的值域在 E_x 稠密且此算子有有界逆，我们就说 λ 是 A 的正则值. 如果方程(10)对某一 λ 除去平凡解以外还有另外非零解，那么这样的 λ 就称为方程(10)或算子 A 的本征值，而对应的非零解就称为方程(10)或算子 A 的与本征值 λ 相应的本征元. 设 λ 为算子 A 的本征值且(9)对某一 y 有解，那么它的解不是唯一的. 因为若 x_0 是方程(9)的解，

$$Ax_0 - \lambda x_0 = y,$$

且 e 是算子 A 的与本征值 λ 相应的本征元，

$$Ae - \lambda e = 0,$$

那么

$$A(x_0+e) - \lambda(x_0+e) = y,$$

所以 x_0+e 也是方程(9)的解.

不为 A 的正则值的复数 λ 的全体称为算子 A 的谱. 特别,所有的本征值均属于谱.

由定理 2 和 3 得如下命题:

若 λ 满足 $\frac{1}{|\lambda|}\|A\| = q < 1$，则算子 $A-\lambda I$ 有逆且

$$R_\lambda = -\frac{1}{\lambda}\left(I + \frac{A}{\lambda} + \frac{A^2}{\lambda^2} + \cdots\right).$$

若 λ 为正则值,则当

$$|\Delta\lambda| < \|(A-\lambda I)^{-1}\|^{-1}$$

时 $\lambda+\Delta\lambda$ 也为正则值. 由此可知正则值的全体为复平面上开集,从而谱为闭集.

例. 在空间 $C[0,1]$ 内考虑积分方程

$$x(t)=y(t)+\lambda\int_0^1 K(t,s)x(s)ds, \tag{11}$$

式中 $K(t,s)$ 在正方形 $0\leqslant t, s\leqslant 1$ 内连续. 令 $\frac{1}{\lambda}=\mu$ 而且把方程写成上面说过的算子方程的形式可得

$$\int_0^1 K(t,s)x(s)ds-\mu x(t)=-\mu y(t),$$

或者令 $Ax=\int_0^1 K(t,s)x(s)ds$, 那么

$$Ax-\mu x=-\mu y.$$

此外,我们得出

$$R_\mu=R_{\frac{1}{\lambda}}=-\frac{1}{\mu}\left(I+\frac{A}{\mu}+\frac{A^2}{\mu^2}+\cdots\right)$$

$$=-\lambda(I+\lambda A+\lambda^2A^2+\cdots).$$

注意到

$$A^pz=\int_0^1 K_p(t,s)z(s)ds,$$

其中 $K_p(t,s)$ 是核 $K(t,s)$ 的重复核,即由下式定义的核:

$$K_1(t,s)=K(t,s)$$

$$K_p(t,s)=\int_0^1 K_1(t,\tau)K_{p-1}(\tau,s)d\tau \quad p>1,$$

由此我们有

$$R_{\frac{1}{\lambda}}z=-\lambda z(t)-\lambda^2\int_0^1 K(t,s)z(s)ds$$

$$-\lambda^3\int_0^1 K_2(t,s)z(s)ds-\cdots.$$

因此方程(11)的解是

$$x(t)=R_{\frac{1}{\lambda}}\left(-\frac{1}{\lambda}y\right)$$

$$= y(t) + \lambda \int_0^1 K(t,s)y(s)ds + \lambda^2 \int_0^1 K_2(t,s)y(s)ds + \cdots.$$

这样一来我们就得出与积分方程论同一的解，即是说

$$x(t) = y(t) + \lambda \int_0^1 R(t, s, \lambda)y(s)ds,$$

式中 $R(t, s, \lambda)$ 是核 $K(t, s)$ 的预解核.

在积分方程论对预解核 $R(t, s, \lambda)$ 所得出的方程是说 $R_{\frac{1}{\lambda}}$ 是算子 $\lambda A - I$ 的右逆和左逆算子.

§6 具有基的 Banach 空间

定义 设E是一个无穷维B型空间. E的元列 $e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots$ 称为这个空间的一个基，如果任一元 $x \in E$ 可以唯一地表为

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i$$

的形式，其中 ξ_i 为定数. 表现的唯一性显然等价于条件

$$\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i = 0$$

当且仅当 $\xi_i = 0$ 对所有 i.

例 1. 设 $E = l_p$. 那么元 $e_1 = \{1, 0, 0, 0, \cdots\}$, $e_2 = \{0, 1, 0, 0, \cdots\}$, $\cdots$ 的全体构成 l_p 的一个基. 因为对任一 $x \in l_p$ 我们有唯一表现

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i,$$

如果 $x = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots\}$ 的话. 事实上

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, 0, 0, \cdots\},$$

因此

$$\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\right\|=\|\{0,0,\cdots,0,\xi_{n+1},\xi_{n+2},\cdots\}\|$$

$$=\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\to 0,$$

这是因为收敛级数的余项趋近于零．从而

$$x=\lim_n\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i e_i.$$

此外，如果

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i e_i=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i' e_i,$$

即 $$0=\sum_{i=1}^{\infty}(\xi_i-\xi_i')e_i=\{\xi_1-\xi_1',\xi_2-\xi_2',\cdots\},$$

那么 $$\xi_i=\xi_i',\ i=1,2,\cdots,$$

这就是所要证明的．

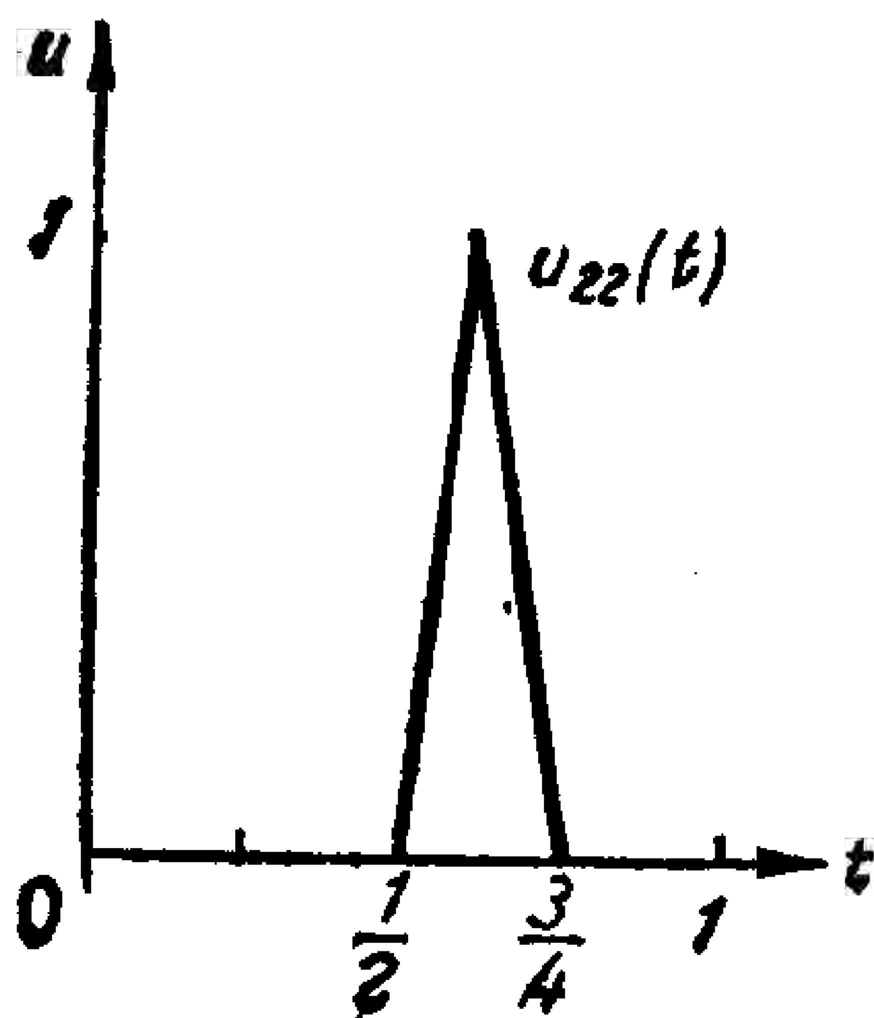


图 3

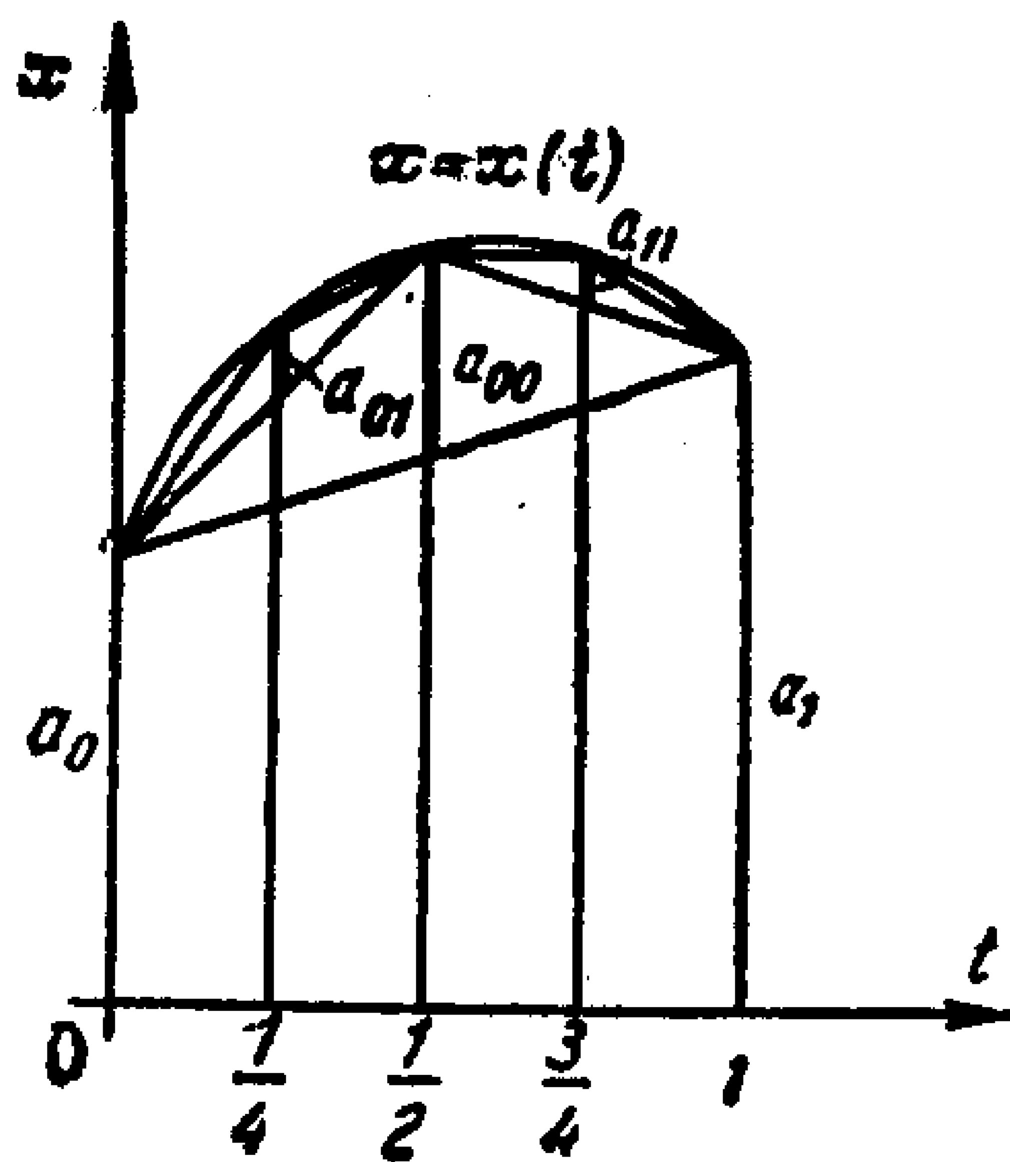


图 4

例 2. 设 $E=C[0,1]$. 在 $C[0,1]$ 内讨论如下的元列

$$t,\ 1-t,\ u_{00}(t),\ u_{10}(t),\ u_{11}(t),\ u_{20}(t),\ u_{21}(t),\ u_{22}(t),\ \cdots \tag{1}$$

式中 $u_{kl}(t), k=1,2,\cdots, 0\leqslant l<2^k$ 定义如下：$u_{kl}(t)=0$，如果 t 在区间 $\left(\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right)$ 之外．但在此区间内 $u_{kl}(t)$ 的图形为一高等于一的等边三角形（在图 3 给出 $u_{22}(t)$ 的图形）．

每一函数 $x(t)\in C[0,1]$ 可表为级数的形式

$$x(t)=a_0t+a_1(1-t)+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{2^k-1}a_{kl}u_{kl}(t), \tag{2}$$

式中 $a_0=x(0)$．$a_1=x(1)$，且系数 a_{kl} 则由图 4 所示的几何构造而唯一确定．

级数(2)的部分和

$$a_0t+a_1(1-t)+\sum_{k=0}^{s-1}\sum_{l=0}^{2^k-1}a_{kl}u_{kl}(t)$$

显然是一个折线具有 2^s+1 个顶点位于曲线 $x=x(t)$ 上横坐标等距的点上．函数(1)的全体构成 $C[0,1]$ 的一个基．

如果空间 E 有基*⁾，那么它显然是可分的．作为具有基的空间内的一个可数稠密集可取形如 $\sum_{i=1}^{n}r_ie_i$ 的线性组合，其中 r_i 为有理数．我们自然假设每一可分 B 型空间有基．但是，尽管对我们熟知的所有具体的 B 空间来说，我们构造了它的基．然而对任一可分 B 空间基是否存在没有得到证

---

*⁾ 本节定义的基一般称为 Schauder 基以区别于对任一线性空间均存在的 Hamel 基．——译者注

明[*].

设 $E=E_x$ 为 B 型空间具有基 $e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots$. 我们考虑线性空间 E_y, 其元为所有可能的使得级数 $\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i e_i$ 收敛的数列 $y=\{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n, \cdots\}$. 在 E_y 内引进范数，令

$$\|y\|=\sup_n\left\|\sum_{i=1}^{n}\eta_i e_i\right\|.$$

我们来证明 E_y 为 B 型空间. 事实上，验证范数公理的被满足是不难的. 今设给定序列

$$\{y_k\}\subset E_y,\quad y_k=\{\eta_i^{(k)}\}_{i=1,2,\cdots}.$$

若此序列自收敛，那么对给定的 $\varepsilon>0$ 我们有

$$\|y_m-y_k\|=\sup_n\left\|\sum_{i=1}^{n}(\eta_i^{(m)}-\eta_i^{(k)})\, e_i\right\|<\varepsilon$$

对 $m, k\geqslant m_0(\varepsilon)$. 从而

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}(\eta_i^{(m)}-\eta_i^{(k)})e_i\right\|<\varepsilon, \tag{3}$$

对 $m, k\geqslant m_0(\varepsilon)$ 及对任意 n 成立. 由此

$$\begin{aligned}&\|(\eta_n^{(m)}-\eta_n^{(k)})e_n\|\\&=\left\|\sum_{i=1}^{n}(\eta_i^{(m)}-\eta_i^{(k)})e_i-\sum_{i=1}^{n-1}(\eta_i^{(m)}-\eta_i^{(k)})e_i\right\|\\&\leqslant\left\|\sum_{i=1}^{n}(\eta_i^{(m)}-\eta_i^{(k)})e_i\right\|+\left\|\sum_{i=1}^{n-1}(\eta_i^{(m)}-\eta_i^{(k)})e_i\right\|\\&<2\varepsilon,\end{aligned}$$

因此

---

[*] 最近 P. Enflo 在 *Acta Math* **130** (1973), 309—317 构造了一个可分 B 型空间但不具有 Schauder 基. 从而解决了 Banach 提出的这个问题. ——译者注

$$|\eta_n^{(m)} - \eta_n^{(k)}| < \frac{2\varepsilon}{\|e_n\|},$$

对 $m, k \geqslant m_0(\varepsilon)$ 及对任意 n 成立．从而数列 $\{\eta_n^{(m)}\}_{m=1,2\cdots}$ 收敛于某一极限 $\eta_n^{(0)}$ 而且对任意 n 成立．

在不等式(3)中取 $k\to\infty$ 的极限得

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}(\eta_i^{(m)} - \eta_i^{(0)})e_i\right\| \leqslant \varepsilon \tag{4}$$

对 $m \geqslant m_0(\varepsilon)$ 和任意 n．令

$$s_n^{(m)} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i^{(m)} e_i, \quad s_n^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i^{(0)} e_i.$$

注意到不等式(4)可得

$$\|s_{n+p}^{(0)} - s_n^{(0)}\| \leqslant \|s_{n+p}^{(m)} - s_n^{(m)}\| + 2\varepsilon$$

对 $m \geqslant m_0(\varepsilon)$ 和任意 n 及 $p>0$ 成立．

今设给定任意数 $\delta>0$．选 ε，从而选 $m_0(\varepsilon)$ 使 $2\varepsilon < \frac{\delta}{2}$．固定 $m \geqslant m_0(\varepsilon)$ 之后再取 n_0 使

$$\|s_{n+p}^{(m)} - s_n^{(m)}\| < \frac{\delta}{2}$$

对 $n \geqslant n_0$ 和任意 $p>0$（由于级数 $\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i^{(m)} e_i$ 的收敛性这是可能的）．于是

$$\|s_{n+p}^{(0)} - s_n^{(0)}\| < \delta$$

对 $n \geqslant n_0$ 及注意 $p>0$．换句话说，级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i^{(0)} e_i$$

收敛，从而 $y_0 = \{\eta_1^{(0)}, \eta_2^{(0)}, \cdots, \eta_n^{(0)}, \cdots\} \in E_y$．此外，再由不等式(4)得

$$\sup_n \left\| \sum_{i=1}^n (\eta_i^{(m)} - \eta_i^{(0)}) e_i \right\| \leqslant \varepsilon \quad 对 \ m \geqslant m_0.$$

这就证明了 E_y 的完备性.

显然,对每一

$$x = \sum_{i=1}^\infty \xi_i e_i \in E_x$$

有唯一元

$$y_x = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots\} \in E_y$$

与之对应. 反之,对每一 $y = \{\eta_i\} \in E_y$ 有唯一元 $x_y \in E_x$ 与之对应,即

$$x_y = \sum_{i=1}^\infty \eta_i e_i.$$

这样一来,我们定义了一个算子 $x = Ay$ 一对一地映 E_y 于 E_x 上. 不难看出,算子 A 是线性的. 此外算子 A 也是有界的. 事实上,

$$\|Ay\| = \|x\| = \left\| \sum_{i=1}^\infty \eta_i e_i \right\|$$

$$\leqslant \sup_n \left\| \sum_{i=1}^n \eta_i e_i \right\| = \|y\|.$$

由此我们得出一个线性有界算子 A 的一对一地映 E_y 于 E_x 上. 依 Banach 有界逆算子存在定理可知存在逆算子 $y = A^{-1}x$ 而且它也是有界的. 令

$$x = \sum_{i=1}^\infty \xi_i e_i$$

为 E_x 任一元. 我们定义泛函 f_k 为 $f_k(x) = \xi_k$. 显然泛函 f_k 是可加的. 此外

$$|f_k(x)| = |\xi_k| = \frac{|\xi_k| \, \|e_k\|}{\|e_k\|}$$

$$= \frac{\left\| \sum_{i=1}^{k} \xi_i e_i - \sum_{i=1}^{k-1} \xi_i e_i \right\|}{\|e_k\|}$$

$$\leqslant 2\sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \right\| \frac{1}{\|e_k\|} = \frac{2\|y\|}{\|e_k\|}$$

$$= \frac{2\|A^{-1}x\|}{\|e_k\|} \leqslant \frac{2\|A^{-1}\|}{\|e_k\|}\|x\|.$$

由此得出它的有界性．从而 f_k 是线性的，而且

$$\|f_k\| \leqslant 2\frac{\|A^{-1}\|}{\|e_k\|}.$$

今对每一 k 构造泛函 f_k 如上，我们就得出一个无穷序列的线性泛函 $f_1, f_2\cdots, f_n, \cdots \subset E_x^*$，而且任一元 $x \in E_x$ 可以写成

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) e_i.$$

特别，令 $x = e_j$，那么

$$\xi_i = \begin{cases} 1 & 若 \quad i = j, \\ 0 & 若 \quad i \neq j, \end{cases}$$

即

$$f_i(e_j) = \begin{cases} 1 & 若 \quad i = j \\ 0 & 若 \quad i \neq j. \end{cases} \tag{5}$$

由此我们得出两个序列：元列 $\{e_i\}$ 及泛函列 $\{f_i\}$．它们满足等式(5)．这样两个序列称为**双正交的**．

今任取线性泛函 $f \in E_x^*$．因为

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) e_i = \lim_n \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i,$$

所以

$$f(x) = \lim_n \sum_{i=1}^{n} f[f_i(x) e_i] = \lim_n \sum_{i=1}^{n} f_i(x) f(e_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) f(e_i).$$

令 $f(e_i) = c_i$，那么对任一线性泛函 $f \in E_x^*$ 我们有

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i(x),$$

或

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i. \tag{6}$$

表示(6)显然是唯一的．而且级数(6)对每一 x 收敛．

今仍设 x 为 E_x 任一元．于是

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j e_j = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j + \sum_{j=n+1}^{\infty} \xi_j e_j,$$

因此，对每一元 $x \in E_x$ 有两个唯一定义的元与之对应：

$$y_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j \quad 和 \quad z_n = \sum_{j=n+1}^{\infty} \xi_j e_j.$$

由这两个等式定义了两个算子

$$y_n = S_n x \quad 和 \quad z_n = R_n x$$

以 E_x 为定义域且具有值域于同一空间．

显然对每一固定 n，S_n 和 R_n 均为线性有界算子． 事实上，线性是显然的，至于有界性则由不等式

$$\|S_n x\| \leqslant \sup_m \left\| \sum_{j=1}^{m} \xi_j e_j \right\| = \|A^{-1}x\| \leqslant \|A^{-1}\| \|x\|$$

及

$$\|R_n x\| \leqslant 2\|A^{-1}\| \|x\|$$

得出．

第四章 线性泛函

我们将在本章详细讨论定义在线性赋范空间上线性泛函的简单性质。

首先回忆一下以前证明过的既对算子也对泛函成立的某些定理。现在我们对泛函来叙述。

定理 (Banach-Steinhous) 设定义在 Banach 空间 E 上的线性泛函序列在每一点 $x \in E$ 上有界，那么这些泛函的范数序列 $\{\|f_n\|\}$ 也有界。

定理 1 如果线性泛函序列 $\{f_n(x)\}$ 在 Banach 空间 E 的每一点自收敛，那么存在线性泛函 $f(x)$ 使得

$$f_n(x) \to f(x)$$

对任一 $x \in E$。

定理 2 为使线性泛函序列 $\{f_n\}$ 在 Banach 空间 E 的每一点收敛于泛函 f_0，必须且只须

1. 序列 $\{\|f_n\|\}$ 有界，

2. $f_n(x) \to f_0(x)$ 对某一集 $M \subset E$ 的任一 x 成立，但假设 M 的元的线性组合在 E 中稠密。

定理 3 在线性赋范空间 E 内稠密的线性流形 L 上定义的线性泛函可以唯一地扩张成定义在整个空间 E 上线性泛函而不增加范数*。

---

* 因为实数集是 B 型空间，所以第三章 §2 定理 2 适用。——译者注

§1 Hahn-Banach 定理及其推论

下述重要定理指出这样的可能性，即给定在不一定在线性赋范空间 E 内稠密的线性流形 L 上线性泛函可以扩张到整个空间上而不增加范数.

定理 4(Hahn-Banach) 定义在线性赋范空间 E 内的线性流形 L 上的每一线性泛函 $f(x)$ 均可以保持范数地扩张到整个空间 E 上去，即是说，可以构造定义在整个 E 上线性泛函 $F(x)$ 使

1) $F(x)=f(x)$ 对 $x\in L$,

2) $\|F\|_E=\|f\|_L$.

取元 $x_0\bar{\in} L$ 并考虑形如 $x+tx_0$ 的元的集 $(L;x_0)=L_1$, 其中 $x\in L$ 且 t 为任一实数.

显然 L_1 为线性流形. 今证它的每一元可以唯一地表成 $x+tx_0$ 的形式. 否则,设元 $u\in L_1$ 有两种表现:

$$u=x_1+t_1x_0 \quad 和 \quad u=x_2+t_2x_0$$

且 $t_1\neq t_2$ (因为在相反情形下由 $x_1+t_1x_0=x_2+t_1x_0$ 可得 $x_1=x_2$,从而表现唯一). 我们有

$$x_1-x_2=(t_2-t_1)x_0 \quad 和 \quad x_0=\frac{x_1-x_2}{t_2-t_1}.$$

但这是不可能的,因为 $x_0\bar{\in}L$, 但 x_1 和 $x_2\in L$. 由此有 $t_1=t_2$,从而 $x_1=x_2$. 这就证明了表现的唯一性.

今取两个元 x' 和 $x''\in L$, 我们有

$$f(x')-f(x'')=f(x'-x'')\leqslant\|f\|\|x'-x''\|$$
$$\leqslant\|f\|\{\|x'+x_0\|+\|x''+x_0\|\}.$$

由此

$$f(x')-\|f\|\|x'+x_0\|\leqslant f(x'')+\|f\|\|x''+x_0\|.$$

因为 x' 和 x'' 为 L 的任意元，所以

$$\sup_{x\in L}\{f(x)-\|f\|\|x+x_0\|\}\leqslant\inf_{x\in L}\{f(x)+\|f\|\|x+x_0\|\}.$$

由此存在实数 c 满足不等式

$$\sup_{x\in L}\{f(x)-\|f\|\|x+x_0\|\}\leqslant c\leqslant\inf_{x\in L}\{f(x)+\|f\|\|x+x_0\|\}. \tag{1}$$

今取任意元 $u\in L_1$。依上述它可表为

$$u=x+tx_0$$

的形式，其中 $x\in L$ 和实数 t 唯一确定。我们引入一个新泛函 $\varphi(u)$，它对元 $u=x+tx_0$ 由等式

$$\varphi(u)=f(x)-tc$$

定义，其中 c 是满足不等式(1)的某一固定实数。

显然 f 和 φ 在 L 上一致。又 $\varphi(u)$ 也显然是可加的。我们再证 $\varphi(u)$ 也有界且与 $f(x)$ 具有同一范数。

为此我们讨论两个情形。

1) $t>0$。由 $\frac{x}{t}\in L$ 和(1)可得

$$|\varphi(u)|=t\left|f\left(\frac{x}{t}\right)-c\right|\leqslant t\left\{\|f\|\left\|\frac{x}{t}+x_0\right\|\right\}$$

$$=\|f\|\|x+tx_0\|=\|f\|\|u\|.$$

因此

$$|\varphi(u)|\leqslant\|f\|\|u\|. \tag{2}$$

2) $t<0$。由(1)可得

$$f\left(\frac{x}{t}\right)-c\geqslant-\|f\|\left\|\frac{x}{t}+x_0\right\|=-\frac{1}{|t|}\|f\|\|x+tx_0\|$$

$$=\frac{1}{t}\|f\|\|u\|.$$

由此

$$\varphi(u)=t\left\{f\left(\frac{x}{t}\right)-c\right\}\leqslant t\cdot\frac{1}{t}\|f\|\|u\|=\|f\|\|u\|,$$

换句话说仍然得出(2).

这样,不等式(2)对所有 $u\in(L;x_0)=L_1$ 成立. 在(2)中以 $-u$ 代 u 可得

$$-\varphi(u)\leqslant\|f\|\|u\|.$$

再由(2)

$$|\varphi(u)|\leqslant\|f\|\|u\|,$$

从而

$$\|\varphi\|\leqslant\|f\|.$$

但泛函 φ 是 L 上泛函 f 在 L_1 上的扩张,所以

$$\|\varphi\|\geqslant\|f\|.$$

结果

$$\|\varphi\|=\|f\|.$$

(注意我们在泛函 φ 被定义的线性流形上定义 φ 的范数.) 由此可知,泛函 $f(x)$ 扩张到了 $L_1=(L;x_0)$ 上而保持范数.

如果空间 E 可分, 那么 Hahn-Banach 定理的证明可以如下完成. 设 N 是 E 内可数稠密集, 取这个集的那些不含于 L 内的元并排列成

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots.$$

依次在流形

$$(L;x_0)=L_1,\ (L_1;x_1)=L_2,\ \cdots$$

上扩张泛函 $f(x)$,我们得出某一线性泛函 φ_ω 定义在一个在 E 内稠密的线性流形 L_ω 上, 而它是所有 L_n 的并. 之外也有 $\|\varphi_\omega\|=\|f\|$. 之后再依连续性(定理3)扩张 φ_ω 于整个 E. 这样我们就得出所要泛函 F. 在一般情形下, Hahn-Banach 定理的证明要用到 Zorn 引理.

我们考虑泛函 f 的所有可能的保持范数的扩张. 有如上面所证明, 这样的扩张是存在的. 在这些扩张所成的集 Φ 内引入半序,令

$$f'\prec f'',$$

如果在 f' 被定义的线性流形 L' 是在 f'' 被定义的线性流形 L'' 的部分且 $f'(x) = f''(x)$ 对 $x \in L'$. 显然,关系 $f' \prec f''$ 具有半序的所有性质.

今设 $\{f_\alpha\}$ 为集 Φ 的任一全序子集. 这个子集有上界，而它是定义在线性流形 $L_* = \bigcup_\alpha L_\alpha$ 上的泛函 f_*,式中 L_α 是 f_α 的定义域且

$$f_*(x) = f_{\alpha_0}(x),$$

如果 $x \in L_*$ 是 L_{α_0} 的元的话. 显然 f_* 是线性泛函且 $\|f_*\| = \|f\|$,即是说 $f_* \in \Phi$. 由此我们看出 Zorn 引理的所有条件被满足,所以 Φ 有极大元 F. 这个泛函定义在整个 E 上,因为在相反情形下它还可以扩张,而这与 F 为 Φ 的极大元相矛盾.

定理完全证明.

注. 因为满足(1)的数 c 的选择可有不同,而且集 Φ 的极大元也可能不只一个，所以依 Hahn-Banach 定理所得的线性泛函的扩张一般不是唯一的.

Hahn-Banach 定理已被扩张到具有复数因子的情形[1].

推论 1 设 E 为一线性赋范空间且 $x_0 \neq 0$ 为 E 的任一固定元，那么存在定义在整个 E 上泛函 $f(x)$ 满足

1) $\|f\| = 1$,

2) $f(x_0) = \|x_0\|$.

考虑元集 $\{tx_0\} = L$，其中 t 通过所有实数. 集 L 是空间 E 的由 x_0 定义的线性流形. 在 L 上定义泛函 $\varphi(x)$ 如下:若 $x = tx_0$，令

$$\varphi(x) = t\|x_0\|. \tag{3}$$

显然

1) $\varphi(x_0) = \|x_0\|$,

1) Матем. сб. 3 (45), 1938

2) $|\varphi(x)| = |t|\,\|x_0\| = \|x\|$，由此 $\|\varphi\| = 1$.

扩张泛函 $\varphi(x)$ 于整个空间而不增大范数，这样我们就得出一个泛函 $f(x)$ 具有所需性质.

推论 2 设在线性赋范空间 E 内给定线性流形 L. 且设元 $x_0 \bar{\in} L$ 与 L 的距离 $d > 0 (d = \inf_{x\in L}\|x_0 - x\|)$，那么存在线性泛函 $f(x)$ 定义在整个 E 上且满足

1) $f(x) = 0$ 对 $x \in L$,

2) $f(x_0) = 1$,

3) $\|f\| = \frac{1}{d}$.

考虑集 $(L; x_0)$. 它的任一元可唯一地表示成 $u = x + tx_0$ 的形式，其中 $x \in L$ 且 t 为实数. 依下述规则定义泛函 $\varphi(u)$:

$$\text{若 } u = x + tx_0, \text{ 令 } \varphi(u) = t.$$

显然 $\varphi(x) = 0$ 若 $x \in L$ 且 $\varphi(x_0) = 1$.

现在来求 $\|\varphi\|$. 我们有

$$|\varphi(u)| = |t| = \frac{|t|\,\|u\|}{\|u\|} = \frac{|t|\,\|u\|}{\|x + tx_0\|}$$

$$= \frac{\|u\|}{\left\|\frac{x}{t} + x_0\right\|} = \frac{\|u\|}{\left\|x_0 - \left(-\frac{x}{t}\right)\right\|} \leqslant \frac{\|u\|}{d},$$

由此

$$\|\varphi\| \leqslant \frac{1}{d}. \tag{4}$$

此外，存在序列 $\{x_n\} \subset L$ 使

$$\lim_n \|x_n - x_0\| = d.$$

我们有

$$|\varphi(x_n - x_0)| \leqslant \|\varphi\|\,\|x_n - x_0\|,$$

而且因为

$$|\varphi(x_n - x_0)| = |\varphi(x_n) - \varphi(x_0)| = 1,$$

所以
$$1 \leqslant \|\varphi\| \|x_n - x_0\|.$$
取极限得
$$1 \leqslant \|\varphi\| d$$
或
$$\|\varphi\| \geqslant \frac{1}{d}. \tag{5}$$
由(4)和(5)可得
$$\|\varphi\| = \frac{1}{d}.$$
保持范数地扩张 $\varphi(x)$ 于整个空间后，我们得出一个泛函 $f(x)$ 具有所需性质。

第一个推论是说在任一线性赋范空间存在不恒为零的线性泛函[*)]. 另一方面，由这个推论可知：如果线性赋范空间 E 的某一元 x 使得等式 $f(x) = 0$ 对共轭空间 E^* 的任一线性泛函 f 成立，那么 $x = 0$.

这个推论还可以给以如下几何解释.

通过球 $\|x\| \leqslant r$ 的球面的每一点 x_0，即对满足 $\|x_0\| = r$ 的每一 x_0，可以引这个球的承托平面.

这个定理是 Minkowski 对 n 维空间的一个命题的推广.

事实上，对这样一个球的承托平面的方程必须是 $f(x) = r\|f\|$. 但对点 x_0 可以构造泛函 f_0 具范数 1 且
$$f_0(x_0) = \|x_0\| = r. \tag{6}$$
平面
$$f_0(x) = r$$
是承托平面，且由(6)过点 x_0.

第二个推论对于解释用元 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n \cdots\} \subset E$ 的线性组合去逼近已知元 x_0 的可能性的问题是有趣的. 事实上，由第二推论可知，为了 x_0 是形如 $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ 的线性组合的某

[*)] 这个推论说明在任一线性赋范空间内存在充分多的线性泛函，但存在线性拓扑空间，而在其内的线性泛函只有零泛函. 例如: $L_p(0,1)$ $0<p<1$.
——译者注

序列的极限，必须且只须对于在元 $x_1, x_2, \cdots$为零的所有线性泛函 f 有 $f(x_0)=0$.

事实上，设由 $f(x_i)=0,\ i=1,2,\cdots$可得 $f(x_0)=0$. 那么 x_0 不可能与由元$\{x_i\}$所产生的流形 L 的距离 $d>0$. 因为在相反情形下由第二推论将存在泛函 f_0 使得 $f_0(x_i)=0$, $i=1,2,\cdots$ 且 $f_0(x_0)=1$. 但若 $d=0$，那么它是说 x_0 或为线性流形 L 的聚点或 $x_0\in L$. 从而 x_0 可由形如 $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ 的元逼近.

反之，设 x_0 是 L 的元的某一序列的极限且 $f(x_i)=0$ 对某一泛函 f 成立. 于是令

$$x_0=\lim_n \xi_n,\quad \xi_n=\sum_{i=1}^{k_n} c_i^{(n)} x_i,$$

那么

$$f(\xi_n)=\sum_{i=1}^{k_n} c_i^{(n)} f(x_i)=0,$$

从而

$$f(x_0)=f(\lim_n \xi_n)=\lim_n f(\xi_n)=0.$$

§2 某些函数空间内线性泛函的一般形式

对于许多具体的函数空间来说，我们可以求出定义在这些空间内的线性泛函的一般形式. 知道线性泛函的一般形式对函数空间的一些研究是有用处的.

n 维空间 E_n 内线性泛函 设 f 是定义在 E_n 上线性泛函. 对

$$x=\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \in E_n,$$

其中$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$是$E_n$的一个基，我们有

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i f_i.$$

反之，形如

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i f_i \tag{1}$$

的表达式，其中f_i为任意数，显然为E_n内一个线性泛函．因此表达式(1)给出定义在n维空间上线性泛函的一般形式．因为f_i可以看做n维矢量f的分量，所以E_n的共轭空间E_n^*也是n维空间，但它的距离一般异于E_n内的距离．

例如设 $\|x\| = \max\limits_i |\xi_i|$；那么

$$|f(x)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \xi_i f_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\xi_i||f_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|\right)\|x\|,$$

由此

$$\|f\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |f_i|. \tag{2}$$

在另一方面，若取元

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sign} f_i \cdot e_i \in E_n,$$

那么 $\|x_0\| = 1$ 且

$$f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sign} f_i \cdot f_i = \sum_{i=1}^{n} |f_i| = \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|\right)\|x_0\|,$$

因此

$$\|f\| \geqslant \sum_{i=1}^{n} |f_i|. \tag{3}$$

由(2)和(3)可得 $\|f\| = \sum\limits_{i=1}^{n} |f_i|$.

如果在 E_n 内引入欧氏距离，那么不难看出在 E_n^* 内的距离也是欧氏的.

依照张量代数中常用的术语，空间 E_n 的元称为逆变的，而空间 E_n^* 的元则称为协变的. 线性泛函 $f(x)$ 可表为内积的形式

$$f(x)=(x,f)$$

其中 $x\in E_n$, $f\in E_n^*$.

空间 s 内线性泛函一般形式 设 $f(x)$ 是给定在空间 s 内的线性泛函. 令 $e_n=\{\xi_i^{(n)}\}$，式中 $\xi_n^{(n)}=1$ 且 $\xi_i^{(n)}=0$ 对 $i\neq n$. 再令 $f(e_n)=a_n$. 因为空间 s 的收敛是依坐标收敛，所以对元 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}$ 有如下等式

$$x=\lim_n\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k e_k.$$

由此依泛函 $f(x)$ 的连续性可得

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k f(e_k)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\xi_k.$$

因为这个级数对任意数列 $\{\xi_k\}$ 必须收敛，所以从某一下标开始 a_k 必须等于零. 从而

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k\xi_k.$$

反之，对任意自然数 n 和任意实数 a_k 上述形式的表达式是空间 s 内线性泛函，所以定义在空间 s 上的线性泛函的一般形式由等式

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k\xi_k$$

给出，自然数 n 和 a_k, $k=1,2,\cdots,n$ 由泛函 f 唯一确定.

$C[0,1]$ 空间内线性泛函一般形式. Riesz 定理. 设在空间 $C[0,1]$ 内给定线性泛函 $f(x)$. 因为给定在 $[0,1]$ 上

每一连续函数有界而且

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} x(t) = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} x(t),$$

所以空间 $C[0,1]$ 可以看做空间 $M[0,1]$ 的子空间,其中

$$\|x\| = \rho(x,\theta) = \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|.$$

在空间 $C[0,1]$ 内给定的泛函可以保持范数地扩张到整个空间 $M[0,1]$ 上去,并用 $F(x)$ 代表这个扩张泛函.

考虑函数

$$u_t(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{对} \quad 0\leqslant \xi < t \\ 0 & \text{对} \quad t\leqslant \xi\leqslant 1. \end{cases}$$

显然
$$u_t(\xi)\in M[0,1].$$
令
$$F[u_t(\xi)] = g(t).$$
我们证明 $g(t)$ 是囿变函数. 为此用点

$$t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$$

分割[0,1]. 我们构造和

$$\sum_{i=1}^{n}|g(t_i) - g(t_{i-1})|.$$

令
$$\varepsilon_i = \operatorname{sign}[g(t_i) - g(t_{i-1})].$$
于是

$$\sum_{i=1}^{n}|g(t_i) - g(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i[g(t_i) - g(t_{i-1})]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i[F(u_{t_i}) - F(u_{t_{i-1}})] = F\left[\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(u_{t_i} - u_{t_{i-1}})\right].$$

由此

$$\sum_{i=1}^{n}|g(t_i) - g(t_{i-1})| \leqslant \|F\|\left\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(u_{t_i} - u_{t_{i-1}})\right\| \leqslant \|f\|,$$

这是因为

$$\|F\| = \|f\| \quad 且 \quad \left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (u_{t_i} - u_{t_{i-1}})\right\| = 1.$$

由此可知

$$\sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})| \leqslant \|f\|,$$

这就是说，$g(t)$ 是囿变函数。

今取给定在[0, 1]上任一连续函数，且由此构造函数

$$z_n(t) = \sum_{k=1}^{n} x\left(\frac{k}{n}\right)[u_{k/n}(t) - u_{(k-1)/n}(t)].$$

$z_n(t)$ 是阶梯函数. 我们有

$$F(z_n) = \sum_{k=1}^{n} x\left(\frac{k}{n}\right)\left[g\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right].$$

因此

$$\begin{aligned}\lim_n F(z_n) &= \lim_n \sum_{k=1}^{n} x\left(\frac{k}{n}\right)\left[g\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right] \\ &= \int_0^1 x(t) dg(t).\end{aligned}$$

在另一方面,对 $n \to \infty$ 序列 $\{z_n(t)\}$ 一致收敛于 $x(t)$，即 $\|z_n - x\| \to 0$，而且因为泛函 $F(x)$ 连续,所以

$$F(z_n) \to F(x).$$

由此可知

$$F(x) = \int_0^1 x(t) dg(t).$$

但对连续函数 $x(t)$ 有

$$F(x) = f(x),$$

所以

$$f(x) = \int_0^1 x(t) dg(t). \tag{4}$$

这时我们可以把 $g(t)$ 换成另一函数 $\bar{g}(t)$,此函数在 $g(t)$ 的连续点上与 $g(t)$ 重合而且在其余点上左连续：$\bar{g}(t-0) = \bar{g}(t)$.

这样我们得出 F. Riesz 定理.

定理 (F. Riesz) 给定在空间 $C[0,1]$ 上的每一线性泛函可借助 Stieltjes 积分由公式(4)表示，其中 $g(t)$ 为囿变函数由泛函 $f(x)$ 定义. 反之,易见泛函

$$\varphi(x)=\int_0^1 x(t)dh(t)$$

为空间 $C[0,1]$ 内线性泛函,其中 $h(t)$ 为任一囿变函数.

事实上,$\varphi(x)$ 的可加性是显然的. 再由于一致收敛函数序列可在 Stieltjes 积分号下取极限,所以这个泛函的连续性得证.

这样一来我们便证明了公式(4)给出空间 $C[0,1]$ 线性泛函一般形式,而且在这样的意义下了解的,即这个公式对所有可能囿变函数 $g(t)$ 表示 $C[0,1]$ 内所有线性泛函.

我们来求泛函 $f(x)$ 的范数. 我们有

$$\sum_{i=1}^{n}|g(t_i)-g(t_{i-1})|\leqslant\|f\|,$$

所以 $g(t)$ 的全变差满足

$$\bigvee_0^1\{g\}\leqslant\|f\|. \tag{5}$$

在另一方面,由(4)

$$|f(x)|=\left|\int_0^1 x(t)dg(t)\right|\leqslant\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|\bigvee_0^1\{g\}$$
$$=\bigvee_0^1\{g\}\|x\|.$$

所以

$$\|f\|\leqslant\bigvee_0^1\{g\}. \tag{6}$$

由(5)和(6)可得

$$\|f\| = \bigvee_0^1 \{g\}. \tag{7}$$

设 $g(t)$ 是定义在 $[0, 1]$ 上囿变函数满足 $g(0)=0$ 且 $g(t-0)=g(t)$ 对 $0<t<1$. 我们称 $g(t)$ 为一个**正规化囿变函数**. 那么可以证明: 通过公式(4)使 $C[0, 1]$ 内线性泛函与$[0,1]$内正规化囿变函数成一对一对应*).

A. A. Марков[1] 推广了 Riesz 定理，找到了定义在紧空间K上连续函数空间 $C(K)$ 上线性泛函一般形式.

空间 l_p 内线性泛函一般形式 设 $f(x)$ 是定义在 l_p 上的线性泛函. 因为元 $e_k=\{\xi_i^{(k)}\}$, 式中 $\xi_k^{(k)}=1$ 且 $\xi_i^{(k)}=0$ 对 $i\neq k$,构成 l_p 的一个基,所以任一元 $x\in l_p$ 可以写成

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k e_k.$$

所以 $f(x)$ 可以表为

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k f(e_k).$$

令 $f(e_k)=c_k$. 那么数 c_k 由泛函 f 唯一确定. 且

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\xi_k. \tag{8}$$

我们来解释数 c_k 的性质. 令 $x_n=\{\xi_k^{(n)}\}$, 式中

$$\xi_k^{(n)}=\begin{cases}|c_k|^{q-1}\operatorname{sign}c_k & 若\quad k\leqslant n,\\ 0 & 若\quad k>n.\end{cases}$$

我们取数 q 满足等式

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

---

*) 证明见 A. E. Taylor: Introduction to Functional Analysis, 1958,p200. ——译者注

1) Матем. сб. 4 (46), 1938.

于是
$$f(x_n)=\sum_{k=1}^{n}|c_k|^q.$$
在另一方面，
$$f(x_n)\leqslant\|f\|\|x_n\|=\|f\|\left(\sum_{k=1}^{n}|c_k|^{(q-1)p}\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$=\|f\|\left(\sum_{k=1}^{n}|c_k|^q\right)^{\frac{1}{p}}.$$
因此
$$\sum_{k=1}^{n}|c_k|^q\leqslant\|f\|\left(\sum_{k=1}^{n}|c_k|^q\right)^{\frac{1}{p}},$$
从而
$$\left(\sum_{k=1}^{n}|c_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\|f\|.$$
既然这个不等式对任意 n 成立，所以
$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\|f\|.\tag{9}$$
这就是说
$$\{c_k\}\in l_q.$$
反之，任取序列 $\{d_k\}\in l_q$，那么
$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}d_k\xi_k$$
是空间 l_p 内线性泛函．事实上，这个泛函的可加性是显然的．至于它的有界性则可由 Hölder 不等式得出．

这样一来可知公式 (8) 给出空间 l_p 内线性泛函一般形式．

我们来计算泛函 f 的范数．由公式(8)以及 Hölder 不等式可得

$$|f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \|x\|.$$

由此

$$\|f\| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{10}$$

比较(9)和(10)可得

$$\|f\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

推论 取空间 l_2. 定义在 l_2 上线性泛函一般形式将是

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k,$$

其中

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < +\infty$$

且

$$\|f\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

在泛函分析中，除去空间 l_p 外还考虑空间 l. 它的元是所有可能数列

$$x = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots\}$$

使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| < \infty,$$

且

$$\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|.$$

可以证明，空间 l 内每一线性泛函是

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k$$

的形式，其中$\{c_k\}$为有界实数列．泛函 f 的范数由下式给出

$$\|f\| = \sup_k |c_k|.$$

空间 $L_p[0,1]$ 内线性泛函一般形式　考虑给定在 $L_p[0,1]$ $(p>1)$上任一线性泛函．令

$$u_t(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{对} \quad 0 \leqslant \xi < t, \\ 0 & \text{对} \quad t \leqslant \xi \leqslant 1. \end{cases}$$

且令 $g(t) = f[u_t(\xi)]$.

我们来证明 $g(t)$ 是绝对连续函数．设 $\delta_i = (\tau_i t_i)$，$i=1,2,\cdots,h$ 为排列在$[0,1]$内任一系不相交区间．取数 ε_i 定义如前，即令

$$\varepsilon_i = \operatorname{sign}[g(t_i) - g(t_i)].$$

我们有

$$\sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(\tau_i)| = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i [g(t_i) - g(\tau_i)]$$

$$= f\left\{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i [u_{t_i}(\xi) - u_{\tau_i}(\xi)]\right\}$$

$$\leqslant \|f\| \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (u_{t_i}(\xi) - u_{\tau_i}(\xi)) \right\|$$

$$= \|f\| \left(\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i [u_{t_i}(\xi) - u_{\tau_i}(\xi)] \right|^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant \|f\| \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{\delta_i} d\xi \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\| \left(\sum_{i=1}^{n} \operatorname{mes}\delta_i \right)^{\frac{1}{p}}.$$

由此不等式知函数 $g(t)$ 绝对连续．因为绝对连续函数是它的导数的 Lebesgue 积分，所以令 $g'(t) = \alpha(t)$ 时有

$$g(t) - g(0) = \int_0^t \alpha(\tau) d\tau.$$

但

$$g(0) = f[u_0(\xi)] = 0,$$

这是因为

$$u_0(\xi) \equiv 0$$

是空间 $L_p[0,1]$ 的零元. 从而

$$g(t) = \int_0^t \alpha(\tau)d\tau.$$

利用函数 $u_t(\tau)$ 可得

$$f[u_t(\tau)] = g(t) = \int_0^t \alpha(\tau)d\tau = \int_0^1 u_t(\tau)\alpha(\tau)d\tau,$$

而且因为 f 为线性泛函,所以令

$$z_n(\tau) = \sum_{k=1}^{n} c_k[u_{\frac{k}{n}}(\tau) - u_{\frac{k-1}{n}}(\tau)]$$

时可得

$$f(z_n) = \int_0^1 z_n(\tau)\alpha(\tau)d\tau.$$

设 $x(t)$ 是任一有界可测函数,那么存在这样阶梯函数列 $\{z_m(t)\}$ 使当 $m \to \infty$ 时

$$z_m(t) \to x(t)$$

殆遍成立. 这时可以认为序列$\{z_m(t)\}$是一致有界的,所以由 Lebesgue 积分的控制收敛定理可得

$$\lim_m f(z_m) = \lim_m \int_0^1 z_m(t)\alpha(t)dt$$

$$= \int_0^1 \lim_m z_m(t)\alpha(t)dt = \int_0^1 x(t)\alpha(t)dt.$$

在另一方面,由于

$$z_n(t) \to x(t)$$

殆遍且 $z_n(t)$ 一致有界,所以也有

$$\|z_m - x\| = \left(\int_0^1 |z_m(t) - x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \to 0$$

对 $m \to \infty$. 因此也有 $f(z_m) \to f(x)$,由此可得

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\alpha(t)dt.$$

现在考虑由下述等式定义的函数 $x_n(t)$，

$$x_n(t)=\begin{cases}|\alpha(t)|^{q-1}\operatorname{sign}\alpha(t) & 若\quad |\alpha(t)|\leqslant n,\\ 0 & 若\quad |\alpha(t)|>n,\end{cases}$$

其中 q 是与 p 共轭的数，即

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

函数 $x_n(t)$ 是有界可测的．由此

$$f(x_n)=\int_0^1 x_n(t)\alpha(t)dt,$$

且 $$|f(x_n)|\leqslant\|f\|\|x_n\|=\|f\|\left(\int_0^1|x_n(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

在另一方面，

$$\begin{aligned}|f(x_n)|=f(x_n)&=\int_0^1 x_n(t)\alpha(t)dt=\int_0^1|x_n(t)||\alpha(t)|dt\\ &\geqslant\int_0^1|x_n(t)||x_n(t)|^{\frac{1}{q-1}}dt=\int_0^1|x_n(t)|^{\frac{q}{q-1}}dt\\ &=\int_0^1|x_n(t)|^p dt.\end{aligned}$$

由此

$$\int_0^1|x_n(t)|^p dt\leqslant\|f\|\|x_n\|=\|f\|\left(\int_0^1|x_n(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

从而

$$\left(\int_0^1|x_n(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\|f\|.$$

但是，显然也有

$$|x_n(t)|\to|\alpha(t)|^{q-1}$$

殆遍在 $[0,1]$ 成立，这是因为作为可积分的函数 $\alpha(t)$ 仅在测度为零的集上为无穷．取 $n\to\infty$ 的极限可得

$$\left(\int_0^1|\alpha(t)|^{(q-1)p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\|f\|$$

或

$$\left(\int_0^1 |\alpha(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \|f\|. \tag{11}$$

由此得

$$\alpha(t) \in L_q[0,1].$$

今设 $x(t)$ 为 $L_p[0,1]$ 内任一函数，那么 $\int_0^1 x(t)\alpha(t)dt$ 存在。此外存在有界函数列$\{x_m(t)\}$使

$$\int_0^1 |x(t) - x_m(t)|^p dt \to 0$$

对 $m \to \infty$. 所以再由 Hölder 不等式

$$\int_0^1 x_m(t)\alpha(t)dt \to \int_0^1 x(t)\alpha(t)dt.$$

对 $m \to \infty$. 因为 $x_m(t)$ 为有界可测函数，所以

$$\int_0^1 x_m(t)\alpha(t)dt = f(x_m).$$

从而

$$f(x_m) \to \int_0^1 x(t)\alpha(t)dt$$

对 $m \to \infty$. 在另一方面，

$$f(x_m) \to f(x).$$

由此得出

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\alpha(t)dt. \tag{12}$$

这样就证明了定义在 $L_p[0,1]$ 上每一线性泛函可以表为(12)的形式。反之，如果设 $\beta(t)$ 为 $L_q[0,1]$ 内任一函数，那么

$$\varphi(x) = \int_0^1 x(t)\beta(t)dt$$

是一个定义在 $L_p[0,1]$ 上线性泛函。事实上，它的可加性是显然的，至于它的有界则可由 Hölder 不等式得出。

因此公式(12)对任意固定的函数 $\alpha(t)\in L_q[0,1]$ 给出定义在 $L_p[0,1]$ 上线性泛函一般形式.

不难求出这个泛函的范数. 由(12)有

$$
\begin{aligned}
|f(x)| &= \left|\int_0^1 x(t)\alpha(t)dt\right| \\
&\leqslant \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |\alpha(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_0^1 |\alpha(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\|x\|.
\end{aligned}
$$

从而

$$
\|f\| \leqslant \left(\int_0^1 |\alpha(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{13}
$$

比较(13)和(11)可得

$$
\|f\| = \left(\int_0^1 |\alpha(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}.
$$

我们也常考虑 Lebesgue 可积函数空间 $L[0,1]$. 我们令

$$
\|x\| = \int_0^1 |x(t)|\, dt.
$$

定义在 $L[0,1]$ 上线性泛函一般形式由公式

$$
f(x) = \int_0^1 x(t)\alpha(t)dt
$$

给出. 其中 $\alpha(t)$ 为殆遍有界函数且

$$
\|f\| = \underset{[0,1]}{\text{vrai max}}|\alpha(t)|.
$$

Hilbert 空间内线性泛函一般形式 在 Hilbert 空间H内考虑线性泛函 $f(x)$. 因为H为复线性空间,所以 $f(x)$ 可取复值. 这时复值泛函称为线性的,如果它是可加的,齐性的而且连续的(注意对复值泛函这三个条件是独立的).

设 $f(x)$ 是定义在 Hilbert 空间H内任一线性泛函. 令L代表这个泛函的零集,即使得 $f(x)=0$ 的元 $x\in H$的全体. 不难看出L是一子空间. 事实上,由泛函 $f(x)$ 的可加性及齐

性得知L为一线性流形．再由$f(x)$的连续性得出L是闭集．

任取H的一个不属于L的元，并令x_0代表此元在子空间$H\dot{-}L$上的射影．令$f(x_0)=\alpha$，那么显然$\alpha\neq 0$．令

$$x_1=\frac{x_0}{\alpha},$$

那么
$$f(x_1)=1.$$

如果x是空间H的任一元且$f(x)=\beta$，那么我们有

$$f(x)-\beta f(x_1)=0$$

或
$$f(x-\beta x_1)=0,$$

由此$x-\beta x_1=z$，式中$z\in L$．我们有

$$x=\beta x_1+z.$$

这个等式指出空间H是子空间及由元x_1所产生的一维子空间的正交和．

因为$x_1\perp z$，所以有

$$(x, x_1)=\beta\|x_1\|^2,$$

而且因为$\beta=f(x)$，所以

$$f(x)=\left(x, \frac{x_1}{\|x_1\|^2}\right).$$

用u代表$\dfrac{x_1}{\|x_1\|^2}$，我们得出等式

$$f(x)=(x, u). \tag{14}$$

换句话说，任一线性泛函$f(x)$可表为元x和一固定元u的内积的形式．元u由泛函f唯一确定，因为如果也有

$$f(x)=(x, v),$$

那么
$$(x, u-v)=0$$

对任一$x\in H$成立．由此可知$u=v$．此外由等式(14)可得

$$|f(x)|=|(x, u)|\leqslant\|x\|\|u\|.$$

由此

$$\|f\| \leqslant \|u\|.$$

在另一方面

$$f(u) = (u, u) = \|u\|^2,$$

所以 $\|f\|$ 不可能小于 $\|u\|$.

结果 $\|f\| = \|u\|$. 我们得出如下定理. 定义在 Hilbert 空间 H 上每一线性泛函 $f(x)$ 可表为

$$f(x) = (x, u)$$

的形式. 式中元 u 由泛函 f 唯一确定,且

$$\|f\| = \|u\|. \tag{15}$$

反之, 对任意 $u \in H$, 关系式(14)定义了一个线性泛函 $f(x)$ 具有范数(15).

由此公式(14)给出 Hilbert 空间内线性泛函一般形式.

§3 共轭空间与共轭算子

我们曾经指出, 定义在线性赋范空间 E 上的线性泛函 $f(x)$的全体构成一个Banach 空间 E^* 称它为 E 的共轭空间.利用线性泛函的一般形式,我们可以在某些情形下指出 E^*的实现.

1. 设 $E = C[0, 1]$ 考虑在 $t = 0$ 为零且在$[0, 1]$上被定义的正规化囿变函数 $g(t)$ 的全体. 显然,这个集对通常定义的函数的加法和函数与实数的乘法构成一个线性空间. 对这样的正规化囿变函数 $g(t)$ 引入范数 $\|g\| = \bigvee_0^1 \{g\}$. 不难看出范数的所有条件被满足.

这样得出线性赋范空间 V 称为囿变函数空间.

考虑定义在 $C[0,1]$ 上所有线性泛函所成的空间 $E^*=C^*[0,1]$. 有如以前指出过的那样，对每一线性泛函 $f\in C^*[0,1]$ 有唯一正规化囿变函数与之对应. 反之，对每一正规化囿变函数 $g(t)$ 则有一个线性泛函 $f\in C^*[0,1]$ 与之对应. 因此在所有正规化囿变函数与 $C^*[0,1]$ 内线性泛函之间存在一个一对一关系. 显然对泛函 f_1+f_2 有函数 g_1+g_2 与之对应，且对泛函 λf 有函数 λg 与之对应，换句话说，$C^*[0,1]$ 与正规化囿变函数空间 V 之间的这个一一对应是一个同构. 又因为 $\|f\|=\bigvee\limits_0^1\{g\}=\|g\|$，所以这个对应也是等距的.

从泛函分析中许多问题来看，我们对这样两个等距同构的空间是不加区别的. 因而我们就常常说连续函数空间的共轭空间是囿变函数空间.

2. 设 $E=L_p[0,1]$. 此处我们也考虑空间 $L_q[0,1]$，其中 $q=\frac{p}{p-1}$. 因为对每一泛函 $f\in L_p^*[0,1]$ 有唯一函数 $\alpha(t)\in L_q[0,1]$ 与之对应. 且反之也成立. 这就是说，我们在空间 $L_p^*[0,1]$ 与 $L_q[0,1]$ 之间建立了一个一一对应. 有如上述，这个对应既是同构又是等距；即是说，除去等距同构不计外 $L_p^*[0,1]=L_q[0,1]$. 特别，当 $p=2$ 时我们有 $L_2^*[0,1]=L_2[0,1]$. 因此空间 $L_2[0,1]$ 称为**自共轭空间**.

3. 易见 $l_p^*=l_q$. 特别 $l_2^*=l_2$.

我们曾经在第三章 §4 证明过，与一个不一定完备的线性赋范空间共轭的空间是一 Banach 空间，即一完备线性赋范空间. 因为 $L_p[0,1]$ 是 $L_q[0,1]$ 的共轭空间，其中 $\frac{1}{p}+$

$\frac{1}{q}=1$*). 同理 l_p 为 l_q 的共轭空间，所以由 2 和 3 得出空间 $L_p[0,1]$ 和 l_p 的完备性的新的证明.

4. Hilbert 空间内线性泛函由同一空间的元所产生，所以它是自共轭的.

同理 n 维欧氏空间也是自共轭的.

自反空间 设 E 为一线性赋范空间，E^* 是它的共轭空间. 因为 E^* 也是线性赋范空间，所以也可以构造它的共轭空间 $(E^*)^*=E^{**}$. 我们可以如此继续下去.

我们较详细地考虑 E^{**}. 这是定义在 E 的线性泛函所成的空间 E^* 上的线性泛函 F 所成的空间. 设 $f(x)$ 为定义于 E 线性泛函，在此我们认为泛函 f 是固定的；而元 x 在 E 内为变动的.

现在我们换一个观点来看表达式 $f(x)$. 我们也可以认为 $x\in E$ 是固定的，而 f 在 E^* 内是变动的. 例如设

$$f(x)=\int_0^1 x(t)dg(t).$$

固定 $g(t)$ 而令 $x(t)$ 变动得出上述第一个情形，反之固定 $x(t)$ 而令 $g(t)$ 变动则得出上述第二个情形.

对固定的 x 和变动的 f，那么对每一 $f\in E^*$ 有一实数与之对应. 由此对固定的 x 和变动的 f，表达式 $f(x)$ 可以看成是定义在 E^* 上的泛函 F_x. 因此我们可以写

$$f(x)=F_x(f).$$

不难证明 F_x 为线性泛函，从而 $F_x\in E^{**}$. 事实上

$$F_x(f_1+f_2)=(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x)$$

---

*) 应设 $p>1$. 若规定 $p=1$ 时 $q=\infty$，且因 $L_\infty[0,1]$ 是本质有界可测函数空间，那么上述推理不成立，但当 $p=\infty$，$q=1$ 时上述推理成立. ——译者注

$$= F_x(f_1) + F_x(f_2),$$

且 $$|F_x(f)| = |f(x)| \leqslant \|x\|\|f\|.$$

特别，由此可得

$$\|F_x\| \leqslant \|x\|. \tag{1}$$

此外由 Hahn-Banach 定理第一个推论可知对每一 x 存在线性泛函 f_0 具有范数等于一且 $f_0(x) = \|x\|$. 对这个泛函

$$|F_x(f_0)| = |f_0(x)| = \|x\|,$$

或 $$|F_x(f_0)| = \|f_0\|\|x\|,$$

所以我们有

$$\|F_x\| \geqslant \|x\|. \tag{2}$$

比较(1)和(2)可以断定

$$\|F_x\| = \|x\|. \tag{3}$$

同样容易看出

$$F_{x_1+x_2}(f) = F_{x_1}(f) + F_{x_2}(f)$$
$$F_{\lambda x}(f) = \lambda F_x(f).$$

这样一来，我们就证明了对每一 $x \in E$，自然地有一个唯一确定的泛函 $F_x \in E^{**}$ 与之对应，而且这个对应是空间 E 和集 $\{F_x\} \subset E^{**}$ 之间的一个等距同构(E 和 $\{F_x\}$ 之间的一一对应可由 (3) 得出)，即是说 $E \subset E^{**}$. 如果在这个对应下更有 $E = E^{**}$，那么我们就说空间 E 是**自反的**.

例 1. n 维欧氏空间是自反的. 事实上，若 E 为 n 维欧氏空间，那么 E^* 也是 n 维欧氏空间. 从而 E^{**} 为 n 维欧氏空间. 但若一个 n 维空间为另一个的部分，那么它们相重合. 因此由 $E \subseteq E^{**}$ 可得 $E = E^{**}$.

例 2. 空间 $L_p[0,1]$ $(p > 1)$ 是自反的，因为

$$L_p^{**}[0,1] = (L_p^*[0,1])^* = (L_q[0,1])^* = L_p[0,1].$$

例 3. 空间 $l_p(p > 1)$ 是自反的，理由同于例 2.

例 4. 空间 $C[0,1]$ 不是自反的. 用反证法来证此论断.

设 $C[0,1]$ 自反. 那么定义在正规化囿变函数空间V上任一线性泛函 $F(f)$ 必须有 $F_x(f)=f(x)$ 的形式,如果我们适当选择元 $x\in C[0,1]$ 的话. 注意定义在 $C[0,1]$ 上线性泛函 $f(x)$ 的一般形式,那么任一线性泛函 $F(f)$ 都是如下形式:

$$F_x(f)=f(x)=\int_0^1 x(t)df(t). \tag{4}$$

(我们用 $f(t)$ 代表与泛函 $f(x)\in C^*[0,1]$ 相对应的囿变函数.)考虑泛函

$$F_{x_0}(f)=f(t_0+0)-f(t_0-0),$$

它对每一囿变函数 $f(t)$ 使这个函数在点 t_0 的跃距与之对应. 这个泛函的可加性是显然的. 又

$$|F_{x_0}(f)|=|f(t_0+0)-f(t_0-0)|\leqslant\bigvee_0^1\{f\}=\|f\|,$$

由此可知 $F_{x_0}(f)$有界且其范数不超过1.此外显然也有 $F_{x_0}(f)\neq 0$. 事实上,只须考虑 $F_{x_0}(f_1)$,式中

$$f_1(t)=\begin{cases}0 & 对\ 0\leqslant t<t_0\\ 1 & 对\ t_0\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

由(4)必须存在连续函数 $x_0(t)$ 使

$$F_{x_0}(f)=\int_0^1 x_0(t)df(t). \tag{5}$$

现在考查函数

$$f_0(t)=\int_0^t x_0(\tau)d\tau.$$

我们有 $F_{x_0}(f_0)=0$, 这是因为 $f_0(t)$ 在 $[0,1]$ 连续, 但在另一方面,由 $F_{x_0}(f)\neq 0$ 得 $x_0(t)\neq 0$ 且

$$F_{x_0}(f_0)=\int_0^1 x_0(t)df_0(t)=\int_0^1 x_0^2(t)dt>0.$$

由此得出矛盾．这个矛盾的产生是因为我们假设了每一线性泛函 $F\in C^{**}[0,1]$ 是 F_x 的形式，即假设了空间 $C[0,1]$ 是自反的．由此可知 $C[0,1]$ 不是自反的．

A. И. Плеснер 证明了对于上述典型对应来说或 $E=E^{**}$或所有空间序列 $E, E^*, E^{**}, E^{***},\cdots$ 均不相同． 详见[10]．

共轭算子 考虑把线性赋范空间 E_x 映于线性赋范空间 E_y 内的线性有界算子 $y=Ax$．

设 $\varphi(y)$ 是定义于 E_y 上线性泛函．那么 $\varphi(y)$ 对 $y=Ax$ 被定义，式中 x 为 E_x 任一元．而且对 $y=Ax$，我们有

$$\varphi(y)=\varphi(Ax)=f(x).$$

式中泛函 $f(x)$ 定义于 E_x 上． 显然 $f(x)$ 是线性的．这样一来，对每一泛函 $\varphi\in E_y^*$ 有泛函 $f\in E_x^*$ 与之对应．

由此我们构造了某一算子定义在 E_y^* 上而值域含于 E_x 内．这个算子用 A^* 表示并称为 A 的共轭算子． 这时等式 $\varphi(y)=f(x)$ 可以写成

$$f=A^*\varphi.$$

例 1．考虑 n 维空间 E 和 $(E\to E)$ 内算子 A，那么算子 A 由 n 阶矩阵 (a_{ij}) 定义且等式

$$y=Ax$$

可以写成 $\eta_i=\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j$ 形式，其中 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$，$y=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n\}$．考虑线性泛函 $f\in E^*$．我们有

$$f=(f_1,f_2,\cdots,f_n),\quad f(x)=\sum_{i=1}^n f_i\xi_i.$$

因此

$$f(Ax)=\sum_{i=1}^n f_i\eta_i=\sum_{i=1}^n f_i\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_i \xi_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i \right) \xi_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} g_j \xi_j .$$

式中

$$g_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i .$$

矢量 $g = (g_1, g_2, \cdots, g_n)$ 是空间 E^*的元，它由同一空间矢量 $f = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 通过线性变换

$$g = A^* f$$

而得出，式中 A^*由 A 转置的矩阵所产生．由此我们断定在 n 维空间内转移到共轭算子 A^*，就意味着把 A 的矩阵变成它的转置矩阵．

例 2．在空间 $L_2[a, 1]$ 内考虑算子

$$Ax = y(t) = \int_0^1 K(t, s) x(s) ds,$$

式中 $K(t, s)$ 为连续核．

$L_2[0, 1]$ 内任意泛函 $f(y)$ 有以下形式

$$f(y) = (y, f) = \int_0^1 y(t) f(t) dt, \quad f(t) \in L_2[0, 1].$$

因此

$$f(Ax) = \int_0^1 f(t) \left\{ \int_0^1 K(t, s) x(s) ds \right\} dt$$

$$= \int_0^1 x(s) \left\{ \int_0^1 K(t, s) f(t) dt \right\} ds$$

$$= \int_0^1 x(s) g(s) ds,$$

式中

$$g(t) = \int_0^1 K(s, t) f(s) ds.$$

因此在这个情形下移置到共轭算子是说交换核的变量（核 $K(s,t)$ 称核 $K(t, s)$ 的转置核）.

定理 1 映线性赋范空间 E_x 于线性赋范空间 E_y 内的线性有界算子 A 的共轭算子 A^* 也是线性有界算子且

$$\|A^*\| = \|A\|.$$

首先 A^* 显然是可加的. 此外

$$|(A^*\varphi)(x)| = |f(x)| = |\varphi(Ax)| \leqslant \|\varphi\|\|Ax\|$$
$$\leqslant \|\varphi\|\|A\|\|x\|,$$

由此

$$\|A^*\varphi\| \leqslant \|A\|\|\varphi\|.$$

从而 A^* 为有界算子且

$$\|A^*\| \leqslant \|A\|. \tag{6}$$

设 x_0 为 E_x 的某一元. 由 Hahn-Banach 定理第一个推论可知存在这样泛函 $\varphi_0 \in E_y^*$ 其 $\|\varphi_0\| = 1$ 且有 $\varphi_0(Ax_0) = \|Ax_0\|$. 由此得出

$$\|Ax_0\| = \varphi_0(Ax_0) = f_0(x_0) \leqslant \|f_0\|\|x_0\|$$
$$= \|A^*\varphi_0\|\|x_0\| \leqslant \|A^*\|\|\varphi_0\|\|x_0\|$$
$$= \|A^*\|\|x_0\|.$$

由此

$$\|A\| \leqslant \|A^*\| \tag{7}$$

由(6)和(7)可得

$$\|A^*\| = \|A\|.$$

定理证完.

共轭算子的概念也可以对在线性赋范空间 E_x 的稠密集上 L_x 被定义且取值于空间 E_y 内的线性无界算子 A 被定义. 设 A 为这样算子且 $\varphi \in E_y^*$. 考虑

$$\varphi(Ax) = f_0(x) \quad x \in L_x.$$

那么 $f_0(x)$ 显然为可加且齐性泛函定义于 L_x. 对任意泛函 $\varphi \in E_y^*$, f_0 一般说来不是有界的. 但若对某一 $\varphi \in E_y^*$ 泛函 f_0 有界,那么它可以依连续性扩张成定义在整个 E_x 上线性泛函 f.

这样,在某一流形 $L_y^* \subset E_y^*$ 上定义了算子 A^* 它对线性泛函 $\varphi \in L_y^*$ 有线性泛函 $f \in E_x^*$ 与之对应. 这个算子称为线性无界算子 A 的**共轭算子**. 不难验证 L_y^* 为线性流形且 A^* 是这个流形上线性算子,但它在 L_y^* 上一般是无界的*).

例. 在空间 $L_q(G)$, 其中 G 为平面上有界区域,我们来考查微分算子

$$A = \frac{\partial^l}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}}, \quad l_1 + l_2 = l.$$

定义在由 l 次连续可微且在区域 G 的某一边界带形内为零的函数全体所组成的线性流形 $L_0 \subset L_q(G)$ 上. 流形 L_0 在 $L_q(G)$ 内稠密且算子 A 在其上是可分配的但是无界的. 算子的值认为属于同一空间 $L_q(G)$.

设对某函数 $v(x, y) \in L_p(G)$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ 等式

$$\iint_G \frac{\partial^l u(x, y)}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}} v(x, y) dxdy = \iint_G Auvdxdy = \iint_G uwdxdy$$

对任意函数 $u(x, y) \in L_0$ 成立,其中 $w(x, y) \in L_p$.

泛函

$$f(u) = \iint_G u(x, y) w(x, y) dxdy$$

作为定义在 $L_0 \subset L_q(G)$ 上泛函显然是可分配的,此外它也

---

*) A^* 的定义域 L_y^* 是这样 $\varphi \in E_y^*$ 使得 $\varphi(Ax)$ 作为 x 的泛函在 A 的定义域 L_x(在 E_x 内稠密)内关于 E_x 的范数连续. 且若 $\varphi \in E_y^*$, 那么 $\varphi(Ax) = (A^*\varphi)(x)$ 对每一 $x \in L_x$.——译者注

是有界的,因为

$$|f(u)| = \left|\iint_G uwdxdy\right| \leqslant \|u\|_{L_q}\|w\|_{L_p}.$$

由此我们可以把它扩张到整个 $L_q(G)$. 这样我们得出与 A 共轭的算子 A^*,

$$A^*v = w,$$

定义在某一函数集 $v(x,y)\in L_p(G)$ 且其值域于同空间. 回忆一下广义导数的第二定义，我们看出 A^*v 仅与广义导数 $\frac{\partial^l v}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}$ 相差一个因子 $(-1)^l$. 因此广义微分法的运算也可以看出与微分算子相共轭的算子，而此微分算子定义在 l 次连续可微且在G的边界带形为零的函数集上.

在具有基的空间内的算子的矩阵表现 设在具有基的 Banach 空间E内给定线性有界算子A映 E 于其自身.

取 $x\in E$. 于是

$$x = \lim_n x_n,$$

其中

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i.$$

从而

$$y = Ax = A(\lim_n x_n) = \lim_n \sum_{i=1}^{n} \xi_i A e_i.$$

因为 Ae_i 仍为E的元,所以它可以依基的元展开

$$Ae_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ki}e_k.$$

于是

$$y = Ax = \lim_n \sum_{i=1}^{n} \xi_i \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{ki}e_k\right). \tag{8}$$

但 $y\in E$,所以也能依基的元展开,

$$y=\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k e_k. \tag{9}$$

今设$\{f_i\}$是与$\{e_i\}$双正交的泛函序列，那么由(8)和(9)可得

$$\begin{aligned}\eta_m=f_m(y)&=f_m\left\{\lim_n\sum_{i=1}^{n}\xi_i\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{ki}e_k\right)\right\}\\&=\lim_n f_m\left\{\sum_{i=1}^{n}\xi_i\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{ki}e_k\right)\right\}\\&=\lim_n\sum_{i=1}^{n}\xi_i\sum_{k=1}^{\infty}a_{ki}f_m(e_k)\\&=\lim_n\sum_{i=1}^{n}a_{mi}\xi_i=\sum_{i=1}^{\infty}a_{mi}\xi_i.\end{aligned} \tag{10}$$

等式(10)指出算子A由无穷矩阵(a_{mi})而唯一确定（由这个矩阵依元x的分量唯一确定了元$y=Ax$的分量）。

现在来考虑映E^*于其自身的共轭算子A^*

设$f=A^*\varphi$,即对任一$x\in E$

$$\varphi(Ax)=f(x).$$

此外,设

$$\varphi=\sum_{i=1}^{\infty}c_if_i$$

且
$$f=\sum_{i=1}^{\infty}d_if_i.$$

我们有

$$\begin{aligned}\varphi(Ax)&=\varphi\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_{ki}\xi_i\right)e_k\right\}\\&=\lim_n\varphi\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_{ki}\xi_i\right)e_k\right\}\end{aligned}$$

$$= \lim_n \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ki}\xi_i \right) \varphi(e_k)$$

$$= \lim_n \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ki}\xi_i \right) c_k$$

$$= \lim_n \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}c_k \right) \xi_i.$$

在另一方面，

$$\varphi(Ax) = f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} d_i f_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} d_i \xi_i.$$

由此

$$\sum_{i=1}^{\infty} d_i \xi_i = \lim_n \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}c_k \right) \xi_i. \tag{11}$$

令 $x = e_m$，即 $\xi_m = 1$，$\xi_i = 0$ 对 $i \neq m$. 于是公式(11)给出

$$d_m = \lim_n \sum_{k=1}^{n} a_{km}c_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{km}c_k.$$

这个等式指出，对应于共轭算子的矩阵是与原来的算子相对应的矩阵的转置矩阵.

由算子的矩阵表现容易得出

1) $(A+B)^* = A^* + B^*$,

2) $(AB)^* = B^*A^*$,

3) $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$,

如果 A^{-1} 存在的话. 此外我们由定义也容易直接建立这些等式而不用假设空间有基.

内积，正交元，双正交系 设 $x \in E$ 且 f 为 E 上线性泛函,即 $f \in E^*$. 考虑表达式

$$f(x) = (x, f) = (f, x) \tag{12}$$

这个式子对变动的 x 和 f 是关于两变元的双线性泛函，即是说关于每一变量都是线性的．这个双线性泛函当 E 是 Hilbert 空间的情形，即 $E^*=E$，它转化成元 x 和 f 的内积(见 §2 公式(20))．在一般情形，即当 $E^*\neq E$ 时，我们也称表达式(12) 为 $x\in E$ 和 $f\in E^*$ 的内积．

元 $x\in E$ 和 $f\in E^*$ 称为正交的，如果

$$(x,f)=(f,x)=0.$$

定理 2 设 λ_0 是线性算子 $A\in(E\to E)$ 的本征值且 x_0 为对应的本征元．

此外设 μ_0 为共轭算子 A^* 的本征值且 f_0 为对应的本征元，如果 $\lambda_0\neq\mu_0$，那么本征元 x_0 和 f_0 正交．

这个定理是对积分方程的本征函数的正交性定理的推广．

利用内积的记号，我们用等式的形式写出算子 A 和 A^* 的联系，即

$$(Ax,f)=(x,A^*f),$$

此式对任一 $x\in E$ 和 $f\in E^*$ 成立．依定理的条件我们有

$$Ax_0=\lambda_0x_0,\quad A^*f_0=\mu_0f_0.$$

由此利用上述等式可得

$$\lambda_0(x_0,f_0)=\mu_0(x_0,f_0),$$

或

$$(\lambda_0-\mu_0)(x_0,f_0)=0.$$

但依假设 $\lambda_0\neq\mu_0$，所以

$$(x_0,f_0)=0.$$

我们以前说过，序列 $\{x_n\}$，$x_n\in E$ 和序列$\{f_n\}$，$f_n\in E^*$ 称为双正交的，如果

$$(x_i,f_j)=\delta_{ij}. \tag{13}$$

从而对 $i\neq j$，x_i 和 f_j 正交．

在前一章 §6 我们举出过双正交序列的例子。这就是基的元 $e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots$ 和由等式

$$f_k(x) = \xi_k$$

定义的泛函，而 $x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$.

在自共轭空间，例如 Hilbert 空间，双正交序列的两个序列含于同一空间．如果 $f_n = x_n$，那么双正交性还原成通常的正交性．

设序列$\{x_n\}$和$\{f_n\}$双正交且设 x 表为

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i x_i \tag{14}$$

的形式，我们有

$$(x, f_k) = \lim_n \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i, f_k\right) = \lim_n \sum_{i=1}^{n} \xi_i (x_i, f_k).$$

对 $n \geqslant k$ 由等式(13)

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i (x_i, f_k) = \xi_k,$$

这是因为在这个情形下此和的所有项均还原为零除去

$$\xi_k (x_k, f_k) = \xi_k.$$

由此 $(x, f_k) = \xi_k$ 且等式(14)取

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} (x, f_i) x_i \tag{15}$$

的形式.

同理若

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} d_n f_n, \tag{16}$$

那么

$$d_n = (x_n, f).$$

级数(15)和(16)称依双正交序列的 Fourier 级数。

第一个非平凡的双正交函数列曾由 П. Л. Чебышев 及 А. А. Марков 联系到插值理论的问题考虑过.

今证对任一线性无关的元系 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \subset E$ 存在双正交线性泛函系 $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\} \subset E^*$.

令 $L_1 = L(x_2, x_3, \cdots, x_n)$ 代表由元 $x_2, x_3, \cdots, x_n$ 所产生的线性流形.由于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性无关性及 L_1 的闭性,所以 x_1 与 L_1 的距离 $d > 0$. 由此存在线性泛函 $f_1(x)$ 使 $f_1(x) = 0$ 在 L_1 上特别在 $x_2, x_3, \cdots, x_n$ 上成立且 $f_1(x_1) = 1$.

对流形

$$L_2 = L(x_1, x_3, \cdots, x_n)$$

及 x_2 重复这个推理. 照此推下去得出所需要的泛函系.

反之设给定线性无关的线性泛函系 $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\} \subset E^*$, 即是说,若

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x) = 0$$

对任一 $x \in E$, 那么 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. 那么这时存在元系 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset E$ 与此泛函系双正交.

首先设 $n = 1$. 因为 $f_1(x) \neq 0$, 所以存在元 x_0 使 $f_1(x_0) = \alpha \neq 0$. 于是元 $x_1 = \dfrac{x_0}{\alpha}$ 具有所需性质.

设论断对 $n - 1$ 个线性无关泛函已证明. 那么可证它对 n 个泛函的情形成立. 设元系 $\{x_2, x_3, \cdots, x_n\}$ 与泛函 $f_2, f_3, \cdots, f_n$ 双正交. 令 M_1 代表由方程组

$$f_2(x) = 0, \ f_3(x) = 0, \cdots, \ f_n(x) = 0$$

所确定的线性流形. 对任一 $x \in E$ 元

$$u = x - \sum_{i=2}^{n} c_i x_i \qquad \text{式中} \ c_i = f_i(x)$$

属于这个流形. 在 M_1 内存在元 x_0 使 $f_1(x_0) = \alpha \neq 0$, 否则

$f_1(u)$将对所有 u 为零：

$$f_1(x)-\sum_{i=2}^{n}c_if_i(x)=0,$$

或
$$f_1(x)=\sum_{i=2}^{n}f_i(x_i)f_i(x).$$

对任意 $x\in E$. 这就是说，f_1 是 $f_2, f_3, \cdots, f_n$ 的线性组合，依条件这是不可能的.

因此存在 x_0 使

$$f_1(x_0)=\alpha\neq 0,\quad f_2(x_0)=f_3(x_0)=\cdots=f_n(x_0)=0.$$

令 $x_1=\frac{x_0}{\alpha}$，得出双正交系第一个元.

对流形

$$M_2=\{x:\ f_2(x)=0,\ f_3(x)=0,\ \cdots,\ f_n(x)=0\}$$

和泛函 f_2 重复同样推理得 x_2. 其余照此类推.

线性复空间的共轭空间 在这节引入的所有概念可以移置到复空间 E 上去. 共轭空间 E^* 是指 E 上线性复泛函的全体.

内积 (x,f), $x\in E$, $f\in E^*$ 和以前一样是指数 $f(x)$，这时为了保持复 Hilbert 空间内积的性质，我们必须认为 (x,f) 关于 x 为线性泛函而关于 f 则为共轭线性的：

$$(x,\lambda f)=\bar{\lambda}(x,f).$$

这样就定义了 E^* 上用复数 λ 的乘法：λf 是 E 上这样线性泛函 φ 使

$$\varphi(x)=\bar{\lambda}f(x).$$

$A\in(E\to E)$ 的共轭算子 A^* 的概念也移置到复空间的情形：A^* 是 $(E^*\to E^*)$ 内算子使

$$(Ax,f)=(x,A^*f)$$

对任一 $x\in E$ 和 $f\in E^*$.

共轭算子的所有性质对复的情形也成立，但关于 A 和 A^* 的本征元 x_0 和 f_0 的正交定理则为： $Ax_0 = \lambda_0 x_0$，$A^* f_0 = \mu_0 f$ 且 $\lambda_0 \neq \bar{\mu}_0$。

§4 元列与泛函列的弱收敛

设 E 为线性赋范空间. E^* 内线性泛函序列 $\{f_n\}$ 称**弱收敛**于线性泛函 $f_0 \in E^*$ 如果 $f_n(x) \to f_0(x)$ 对所有 $x \in E$*). 因此对线性泛函来说，弱收敛的概念与算子按点收敛概念重合.

利用弱收敛这一词，本章开始所说的定理 1 和 2 可叙述如下:

定理 1 若线性泛函序列 $\{f_n\}$ 弱自收敛，那么它弱收敛于某一线性泛函.

定理 2 为了线性泛函序列 $\{f_n\}$ 弱收敛于线性泛函 f_0，必须且只须

1) 序列 $\{\|f_n\|\}$ 有界，

2) $f_n(x) \to f_0(x)$，对 $x \in M$ 成立，而 M 中元的线性组合在 E 中稠密.

我们再注意一下，由定理 1 知 Banach 空间 E 的共轭空间 E^* 是弱完备的.

对求积公式理论的应用[13]. 在空间 $C[0, 1]$ 内讨论泛函

$$f(x) = \int_0^1 x(t) d\sigma(t),$$

式中 $\sigma(t)$ 为某一非减函数. 随着 $f(x)$ 我们也考虑泛函序列

*) 为了对任一线性赋范空间 E (不仅是 E^*) 定义弱收敛这一重要概念，我们把上述这种收敛称为弱∗收敛. 而把即将定义为 E 的元的弱收敛称为弱收敛. ——译者注

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{k_n} c_k^{(n)} x(t_k^{(n)}), \quad n = 1, 2, \cdots$$

式中 $c_k^{(n)}$ 是这样选择的使得 $f(x)$ 和 $f_n(x)$ 对次数不超过 n 的多项式重合:

$$f(x) = f_n(x), \quad 若 \quad x = \sum_{p=0}^{n} a_p t^p.$$

这样构造的泛函 f_n 可用来作泛函 f 的近似计算近似等式

$$f(x) \approx f_n(x)$$

对所有次数 $\leqslant n$ 的多项式成为精确的称它为**求积公式**.

设有一序列求积公式

$$f(x) \approx f_n(x), \quad n = 1, 2, \cdots$$

我们自然提出问题：序列 $f_n(x)$ 是否对任一函数 $x(t) \in C[0,1]$ 收敛于 $f(x)$. 换句话说,泛函序列 $\{f_n\}$ 是否弱收敛于泛函 f.

定理 3 为使求积公式序列收敛,即为使

$$\lim_n \sum_{k=1}^{k_n} c_k^{(n)} x(t_k^{(n)}) = \int_0^1 x(t) d\sigma(t)$$

对任一连续函数 $x(t)$,必须且只须

$$\sum_{k=1}^{k_n} |c_k^{(n)}| \leqslant K = \text{const}$$

对所有 n.

依泛函 f_n 的定义,对每一 n 次多项式 $x(t)$

$$f_m(x) = f(x) \quad 对 \quad m \geqslant n.$$

此外显然有

$$\|f_n\| = \sum_{k=1}^{k_n} |c_k^{(n)}| \leqslant K.$$

因此泛函序列 $\{f_n\}$ 在所有多项式的集上收敛于 f, 而所

有多项式的集在空间 $C[0,1]$ 稠密. 又泛函 f_n 的范数有界，于是由本节定理 2 立刻得出定理的证明.

B. A Стеклов **定理** 如果求积公式中所有系数 $c_k^{(n)}$ 为正，那么求积公式序列 $f(x)\approx f_n(x)$, $n=1,2,\cdots$ 对任一连续函数 $x(t)$ 收敛.

事实上，对任一 n 和 $x_0(t)=1$ 我们有

$$f_n(x_0)=f(x_0).$$

因此 $$\sum_{k=1}^{k_n}|c_k^{(n)}|=\sum_{k=1}^{k_n}c_k^{(n)}=\int_0^1 d\sigma=\sigma(1)-\sigma(0).$$

从而前述定理的条件被满足.

元的弱收敛 我们引入线性赋范空间元的弱收敛概念.

设 E 为线性赋范空间，$\{x_n\}$ 为 E 的一个元列，且 x_0 属于同空间. 如果对任一线性泛函 $f\in E^*$ 有 $f(x_n)\to f(x_0)$ $n\to\infty$, 我们就说序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0，记作

$$x_n\underset{w}{\to}x_0 \quad 或 \quad w-\lim_n x_n=x_0$$

(也记作 $x_n\to x_0$). 我们也说 x_0 是元列 $\{x_n\}$ 的弱极限.

我们证明同一序列不可能弱收敛于两个不同极限.

设 $x_n\underset{w}{\to}x_0$, 且 $x_n\underset{w}{\to}\xi_0$, 即对任意线性泛函 $f\in E^*$

$$f(x_n)\to f(x_0), \quad 且 \quad f(x_n)\to f(\xi_0).$$

由此 $f(x_0)=f(\xi_0)$ 或

$$f(x_0-\xi_0)=0.$$

由 Hahn-Banach 定理第一推论知 $x_0=\xi_0$.

也不难看出，如果 $x_n\underset{w}{\to}x_0$, 那么任一子序列 $\{x_{n_k}\}$ 也弱收敛于 x_0. 对应于元列的弱收敛，我们也把元列依已知空间的范数的收敛称为强收敛. 若元列 $\{x_n\}$ 强收敛于 $x_0\in E$，我们记作

$$x_n\underset{s}{\to}x_0 \quad 或 \quad s-\lim_n x_n=x_0.$$

显然，由序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 x_0 可知此元列也弱收敛于 x_0。反之则不一定成立．序列可能弱收敛于某一元，但不一定强收敛于它．例如在空间 $L_2[0,1]$ 内考虑元列 $\{\sin n\pi t\}$．令 $x_n(t)=\sin n\pi t$，那么对任一线性泛函有

$$f(x_n)=\int_0^1 \sin n\pi t\alpha(t)dt,$$

式中 $\alpha(t)$ 为平方可积分函数由泛函 f 而唯一确定．显然 $f(x_n)$ 是函数 $\alpha(t)$ 关于系 $\{\sin n\pi t\}$ 的 Fourier 系数，所以 $f(x_n)\underset{w}{\to}0$ 对 $n\to\infty$．但在另一方面 $\{x_n\}$ 并不强收敛．事实上

$$\|x_n-x_m\|^2=\int_0^1[\sin n\pi t-\sin m\pi t]^2dt=1.$$

然而我们有

定理 4 在有限维空间中强收敛与弱收敛相重合.

只须证明在有限维空间中由序列弱收敛于某一元可以导出它强收敛于同一元．设 E 为有限维空间且设对给定的序列 $\{x_n\}$ 有 $x_n\underset{w}{\to}x_0$．因为 E 是有限维的，所以存在有限个线性无关的元 $e_1,e_2,\cdots,e_k$ 使每一元 $x\in E$ 可以表为唯一的形式 $x=\xi_1e_1+\xi_2e_2+\cdots+\xi_ke_k$，式中 ξ_i 为实数．设

$$x_n=\xi_1^{(n)}e_1+\xi_2^{(n)}e_2+\cdots+\xi_k^{(n)}e_k,$$

$$x_0=\xi_1^{(0)}e_1+\xi_2^{(0)}e_2+\cdots+\xi_k^{(0)}e_k.$$

我们考虑泛函 $f_i\in E^*$ 使 $f_i(e_i)=1$; $f_i(e_j)=0$ 对 $j\neq i$，我们有

$$f_i(x_n)=\xi_i^{(n)} \quad 和 \quad f_i(x_0)=\xi_i^{(0)},\ i=1,2,\cdots,k.$$

但因 $f(x_n)\to f(x_0)$ 对任意线性泛函 f，所以也有 $f_i(x_n)\to f_i(x_0)$，即

$$\xi_i^{(n)}\to\xi_i^{(0)} \quad i=1,2,\cdots,k,$$

但在有限维空间中按坐标收敛蕴含强收敛，从而 $x_n \underset{s}{\to} x_0$。

存在无穷维空间，在其内强收敛与弱收敛一致．例如空间 l_1 即为一例，即这样序列 $\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots\}$ 使 $\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|$ 收敛．

М. И. Кадец 证明了下述有趣结果：

若空间 E 可分，那么在其内可以引入这样一个等价范数使得在此新范数下由 $x_n \underset{\omega}{\to} x_0$ 以及 $\|x_n\| \to \|x_0\|$ 可得 $\{x_n\}$ 强收敛于 x_0。

定理 5 若序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0，那么存在线性组合序列 $\left\{\sum_{k=1}^{k_n} c_k^{(n)} x_n\right\}$ 强收敛于 x_0.

换句话说，x_0 属于由元 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 所产生的闭线性流形．

如果不然，即是说 x_0 不属于由 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 所产生的闭线性流形．那么依 Hahn-Banach 定理第二推论存在线性泛函 $f \in E^*$ 使 $f(x_0) = 1$ 和 $f(x_n) = 0$ 对 $n = 1, 2, \cdots$. 但这就是说 $f(x_n) \not\to f(x_0)$ 而与条件 $x_n \underset{w}{\to} x_0$ 矛盾．

定理 6 设 A 为线性有界算子定义于线性赋范空间 E_x 且其值域于线性赋范空间 E_y. 如果序列 $\{x_n\} \subset E_x$ 弱收敛于 $x_0 \in E_x$，那么序列

$$\{Ax_n\} \subset E_y$$

弱收敛于 $$Ax_0 \in E_y.$$

取任意线性泛函 $\varphi \in E_y^*$，那么

$$\varphi(Ax_n) = f(x_n)$$

式中 $f \in E_x^*$. 同理

$$\varphi(Ax_0) = f(x_0).$$

因为 $x_n \underset{\omega}{\to} x_0$,所以

$$f(x_n) \to f(x_0),$$

即
$$\varphi(Ax_n) \to \varphi(Ax_0).$$

既然 φ 为 E_y^* 内任意泛函,所以

$$Ax_n \underset{\omega}{\to} Ax_0.$$

这就是说,每一线性有界算子不仅是强连续而且也弱连续.

定理 7 若序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0,那么$\{x_n\}$的范数列有界.

我们把元 x_n, $n=1,2,\cdots$ 看成空间 E^{**} 的元. 那么序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0 是说泛函序列 $\{x_n\}\subset E^{**}$ 对每一 $f\in E^*$. 于是由 Banach-Steinhaus 定理可知 $\{\|x_n\|\}$ 有界,这就是所要证明的.

注. 若 x_0 是序列$\{x_n\}$的弱极限,那么

$$\|x_0\| \leqslant \varliminf_n \|x_n\|,$$

而且上述定理蕴含存在有限的下极限.

事实上,设

$$\|x_0\| > \varliminf_n \|x_n\|.$$

那么存在数 c 使

$$\|x_0\| > c > \varliminf_n \|x_n\|.$$

从而存在序列$\{x_{n_i}\}$使

$$\|x_0\| > c > \|x_{n_i}\|.$$

构造线性泛函 f_0 使 $\|f_0\|=1$,且

$$f_0(x_0) = \|x_0\| > c.$$

于是

$$f_0(x_{n_i}) \leqslant \|f_0\|\|x_{n_i}\| = \|x_{n_i}\| < c$$

对所有 i. 从而

$$f_0(x_n) \not\to f_0(x_0),$$

但这与条件 $x_n \underset{\omega}{\to} x_0$ 相矛盾.

严格不等式成立的情形是存在的,

$$\|x_0\| < \lim_n \|x_n\|,$$

而这由下述例子可知

在空间 $L_2[0, 1]$ 考虑函数

$$x_n(t) = \sqrt{2} \sin n\pi t.$$

我们有 $\|x_n\| = 1$,所以

$$\lim_n \|x_n\| = 1.$$

在另一方面对任一线性泛函 f 可得

$$f(x_n) = \sqrt{2}\int_0^1 \alpha(t) \sin n\pi t dt = \sqrt{2}\, c_n.$$

式中 c_n 为函数 $\alpha(t) \in L_2[0, 1]$ 的 Fourier 系数,因此 $n \to \infty$ 时 $f(x_n) \to 0$ 对任意线性泛函 f,即是说 $x_n \underset{\omega}{\to} 0$. 从而 $x_0 = 0$. 由此

$$\|x_0\| = 0 < 1 = \lim \|x_n\|.$$

定理 8 为使序列$\{x_n\}$弱收敛于 x_0,必须且只须

1) 序列$\{\|x_n\|\}$有界,

2) $f(x_n) \to f(x_0)$,其中 f 为属于其线性组合在 E^* 稠密的线性泛函的集 Γ 的任一元.

这个定理是本节定理 2 的特例. 为了说明这一点只须注意: 序列 $\{x_n\} \subset E$ 弱收敛于 $x_0 \in E$,显然等价于把同一序列看做定义在 E^* 上线性泛函序列,收敛也看成 E^* 上线性泛函的 x_0.

几个具体空间中的弱收敛.

l_q 内弱收敛:

定理 9 为使 l_p 内序列$\{x_n\}$的元 $x_n = \{\xi_i^{(n)}\}$ 弱收敛于

$x_0=\{\xi_i^{(0)}\}\in l_r$，必须且只须

1）序列$\{\|x_n\|\}$有界，

2）$n\to\infty$ 时 $\xi_i^{(n)}\to\xi_i^{(0)}$ 对所有 i（一般说来对 i 不是一致的）.

为了证明，我们注意元 $f_i=\{0,0,\cdots 0,1,0,\cdots\}$ $i=1,2,\cdots$的线性组合在 $l_q=l_p^*$ 内稠密．因此由一般判别法，为了 $x_n\underset{w}{\to}x_0$，必须且只须它满足第一条件且

$$f_i(x_n)=\xi_i^{(n)}\to f_i(x_0)=\xi_i^{(0)}$$

对任意 i.

可以说，l_p 内的弱收敛是说按坐标收敛以及范数的有界性.

l_p 内弱收敛:

定理 10 为使序列 $\{x_n(t)\}\subset L_p[0,1]$ 弱收敛于 $x_0\in L_p[0,1]$，必须且只须

1）序列$\{\|x_n\|\}$有界，

2）$\int_0^t x_n(\tau)d\tau\to\int_0^t x_0(\tau)d\tau$ 对任意 $t\in[0,1]$.

第一条件与一般判别法第一条件一致．我们只考虑第二个条件．令

$$\alpha_\tau(t)=\begin{cases}1 & \text{对 } 0\leqslant t\leqslant\tau\\ 0 & \text{对 } \tau<t\leqslant 1.\end{cases}$$

那么函数 $\alpha_\tau(t)$ 的线性组合．即和

$$\sum_{i=1}^n c_i[\alpha_{\tau_i}(t)-\alpha_{\tau_{i-1}}(t)]$$

在 $L_q[0,1]=L_p[0,1]^*$稠密，其中$0=\tau_0<\tau_1<\cdots<\tau_{n-1}<\tau_n=1$．从而为了

$$x_n(t)\underset{\omega}{\to}x_0(t)$$

必须且只须它满足第一条件且当$n\to\infty$时

$$\int_0^1 x_n(t)\alpha_\tau(t)dt \to \int_0^1 x_0(t)\alpha_\tau(t)dt,$$

或
$$\int_0^\tau x_n(t)dt \to \int_0^\tau x_0(t)dt$$

对任一 $\tau \in [0, 1]$.

Hilbert 空间内弱收敛:

因为在 Hilbert 空间H内每一线性泛函 $f(x)$ 是内积的形式,所以在此空间内

$$x_n \underset{\omega}{\to} x_0$$

是说对任意 $y \in H$

$$(x_n, y) \to (x_0, y).$$

以前我们说过,若 $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$, 那么有 $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$, 即内积对元的强收敛关于两变元的全体是连续的. 但若 $x_n \underset{\omega}{\to} x_0$, $y_n \underset{\omega}{\to} y_0$, 那么一般 $(x_n, y_n) \not\to (x_0, y_0)$. 例如说,若

$$x_n = y_n = e_n,$$

其中$\{e_n\}$为任规范正交序列,于是 $e_n \underset{\omega}{\to} 0$, 但

$$(e_n, e_n) = \|e_n\|^2 = 1 \not\to 0 = (0, 0).$$

可是,若 $x_n \to x_0$, $y_n \underset{\omega}{\to} y_0$, 那么 $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$. 事实上,在此情形下 $\|y_n\|$ 依全体有界,令

$$M = \sup_n \|y_n\|.$$

我们有

$$\begin{aligned} &|(x_n, y_n) - (x_0, y_0)| \\ &\leqslant |(x_n - x_0, y_n)| + |(x_0, y_n - y_0)| \\ &\leqslant M\|x_n - x_0\| + |(x_0, y_n - y_0)|, \end{aligned}$$

且右边两项均趋于零. 最后,也注意,若 $x_n \underset{\omega}{\to} x_0$ 且 $\|x_n\| \to \|x_0\|$,那么 $x_n \to x_0$, 因为

$$
\begin{aligned}
\|x_n - x_0\|^2 &= (x_n - x_0,\ x_n - x_0) \\
&= [(x_n,\ x_n) - (x_0,\ x_0)] \\
&\quad + [(x_0,\ x_0) - (x_0,\ x_n)] \\
&\quad + [(x_0,\ x_0) - (x_n,\ x_0)],
\end{aligned}
$$

而右边所有项均趋于零.

第五章　距离空间与赋范空间内的紧集

一百年以前捷克数学家 Bolzano 发现数直线上每一有界无穷集至少有一聚点并且注意到了这个定理对数学分析的严格奠基的重要性．由不仅是点集，而且是函数集或曲线集选出收敛序列已经用来证明常微分方程，变分学等等的解的存在定理．这就导致位于某些空间的集的紧性这一个一般概念．

§1　定义、一般定理

位于距离空间 X 的集 K 称为紧的[*]，如果这个集的每一元列总含有收敛子序列．如果所述序列的极限也含于 K，那么集 K 称为自紧的．如果这些含于 X 的极限可能不属于 K，那么 K 称为在 X 内紧，或说 K 相对于 X 紧，显然为了集 K 为自紧的必须且只须它在 X 内为紧的且为闭的．

特别，如果空间 X 自身的每一序列总含有一个子序列收敛于 X 的某一元时，空间 X 称为紧空间显然紧距离空间是完备的．

例 1．设 $X=[0,1]$．由 Bolzano-Weiérstrass 知它为紧空间．

例 2．设 $X=E_1$——一维欧氏空间(数直线) X 非紧．事

[*] 注意此书的紧性定义与一般书不同，这里的紧性是通常所说的列紧性、而本书的自紧性为一般理解的紧性．——译者注

实上，它的子集 $M=\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$ 不含任何收敛子列．然而同样由 Bolzano-Weierstrass 定理可知每一有界集为紧的，而且每一有界闭集为自紧的．

例 3．设 X 为 n 维欧氏空间 E_n．同于前例 E_n 不是紧的，然而 E_n 每一有界子集为紧集．

例 4．设 $X=C[0, 1]$．此空间非紧，不仅如此还存在有界非紧集(见本节定理 1 下的注)．

例 5．设 $X=l_2$．此空间非紧，不仅如此，在此空间内存在有界非紧集．例如闭单位球就是这样一个例子．设 $\bar{S}(\theta, 1)=S$ 为闭单位球．我们考虑 S 的点列：

$$e_1=\{1, 0, 0, \cdots\}, \quad e_2=\{0, 1, 0, \cdots\}, \cdots$$

我们有 $\|e_i-e_j\|=\sqrt{2}$ 对 $i\neq j$．因此序列$\{e_i\}$及其任意子列均不收敛．这就证明了 S 的非紧性．空间 l_2 的一个非平凡的紧集的例子是所谓 Hilbert 立方体．它是这样的点 $x=\{\xi_1, \xi_2\cdots, \xi_n, \cdots\}$ 的全体 U，其中坐标满足 $0\leqslant\xi_n\leqslant\frac{1}{n}$．集 U 的紧性将由以后讲的 l_p 空间紧性判别法可知．

对紧集可以证明类似于完备距离空间内球套的定理．这时我们不假设 X 的完备性．即是说下述定理成立．

定理 (Cantor) 设在距离空间 X 内给定非空闭紧集序列

$$K_1\supset K_2\supset\cdots\supset K_n\supset\cdots.$$

那么交 $K=\bigcap_{i=1}^{\infty}K_i$ 非空．

事实上，在每一集 K_i 内选一点 x_i．我们就得出一个序列 $\{x_i\}\subset K_1$．因 K_1 为紧集，所以由 $\{x_i\}$ 可选收敛子序列 $\{x_{i_k}\}$．令

$$x_0=\lim_k x_{i_k},$$

因为对固定 n，从下标 $i_k > n$ 开始的所有项含于 K_n，且因 K_n 闭，所以 $x_0 \in K_n$ 对任意 n. 但这时 $x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} K_n$，定理证完.

极值存在定理 给定在闭区间上连续函数的基本定理的证明是基于闭区间的自紧性. 这些定理的某些可以推广到任一距离空间的紧集上的连续泛函上去. 例如我们有下述定理成立，它是熟知的 Weierstrass 定理的推广.

定理 1 设 K 为距离空间 X 内自紧集，$f(x)$ 是定义于 K 上连续泛函数，那么

1）泛函 $f(x)$ 在 K 上有界；

2）泛函 $f(x)$ 在 K 上达到它的上确界和下确界.

1. 我们证明泛函 $f(x)$ 上有界（同理可证明它下有界）. 假如不然，在 K 内存在序列 $\{x_n\}$ 使 $f(x_n) > n$. 因为 K 自紧的，所以序列 $\{x_n\}$ 含有子序列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 $x_0 \in K$. 于是一方面有 $f(x_{n_k}) > n_k$，从而对 $k \to \infty$，$f(x_{n_k}) \to \infty$. 在另一方面，泛函 $f(x)$ 在 K 上到处连续，特别也在 x_0 连续，所以

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0) \quad 对 \ k \to \infty$$

这样便得出矛盾. 从而就证明了泛函 $f(x)$ 的有界性.

2. 设 $\beta = \sup_{x \in K} f(x)$. 这就是说，$f(x) \leqslant \beta$ 对所有 $x \in K$ 且对任一 $\varepsilon > 0$ 存在这样点 $x_\varepsilon \in K$ 使

$$f(x_\varepsilon) > \beta - \varepsilon.$$

从而存在点列 $\{x_n\}$ 使

$$\beta - \frac{1}{n} < f(x_n) \leqslant \beta. \tag{1}$$

因为 K 自紧，序列 $\{x_n\}$ 含有子序列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 $x_0 \in K$. 于是

$$\beta - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leqslant \beta.$$

从而 $$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \beta.$$

在另一方面，因为 $f(x)$ 在集 K 的所有点，特别在 x_0 点连续，所以

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$$

这就是说 $f(x_0) = \beta$. 得所欲证.

同理，若 $\alpha = \inf\limits_{x\in K} f(x)$，那么存在点 $\xi_0 \in K$ 使 $f(\xi_0) = \alpha$。

注. 如果连续泛函 $f(x)$ 给定在非自紧集 M 上，那么 $\sup\limits_{x\in K} f(x)$ 和 $\inf\limits_{x\in k} f(x)$ 可能达不到.

例如我们考虑 $C[0,1]$ 内的集 M，它由满足 $x(0)=0$，$x(1)=1$ 且 $\max|x(t)| \leqslant 1$ 的所有函数 $x(t)$ 所组成.

泛函 $$f(x) = \int_0^1 x^2(t)\,dt$$

在 M 上连续但达不到它的下确界.

事实上，若 $x(t) = t^n$，那么

$$f(x) = \frac{1}{2n+1}.$$

这就是说 $$\inf_M f(x) = 0.$$

但是对联结点 $(0,0)$ 和 $(1,1)$ 的每一连续曲线 $x = x(t)$ 总有 $f(t) > 0$. (由此更可知，我们所讨论的曲线集是非紧的，然而它是 $C[0,1]$ 内有界闭集).

因此，在应用定理 1 之前，必须先明确给定连续线性泛函的集是自紧的. 在非紧集上的泛函达到它的上确界或下确界的假设可能导致错误结论如上例所示.

作为同一类型的第二个例子，我们援引欧几里得第五公理的错误证明. 正如众所周知，欧几里得第五公理与至少有一个三角形的内角和等于 π 这一假设是等价的. 可以完全严

格地证明，三角形的内角和不大于 π. 我们现在来证明某一三角形的内角和等于 π. 设 K 是三角形内角和的上确界. $K\leqslant\pi$. 令有一个三角形 ABC（图5）存在，而它的内角和达到这个上确界 K. 由 AB 边上任一内点 D 与顶点 C 作联线 CD. CD 把所给予三角形分成两个三角形 ADC 和 DCB，而每一个的内角和均不超过 K. 在另一方面，这两个三角形的内角和等于 $K+\pi$. 从而

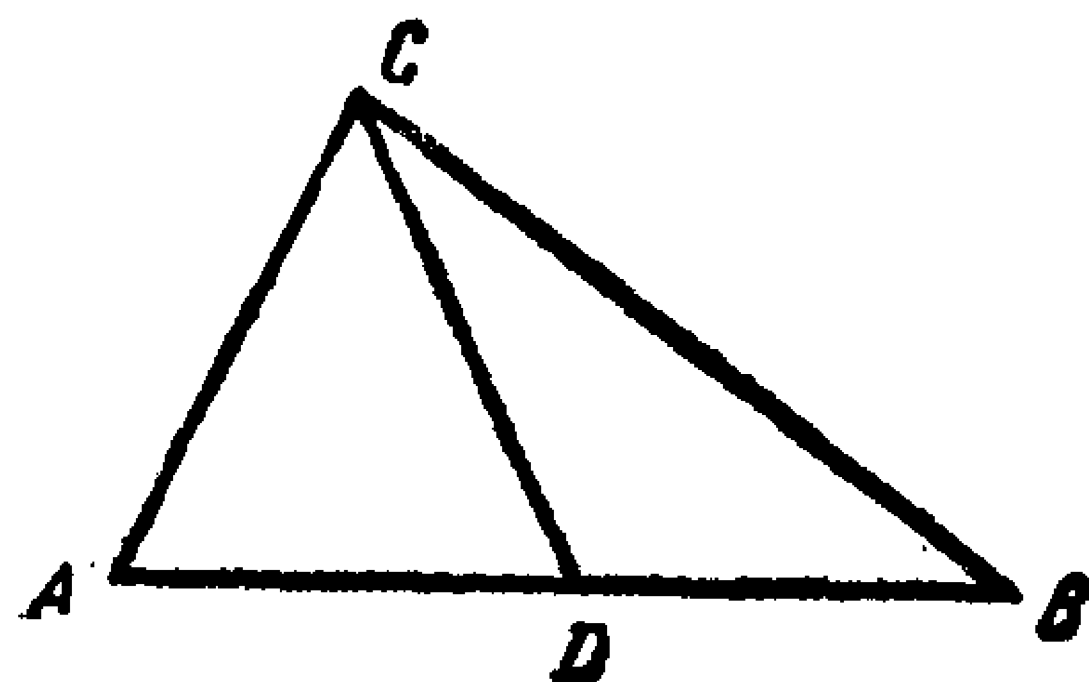


图 5

$$K+\pi\leqslant 2K.$$

因为 K 不超过 π，所以

$$K=\pi.$$

这样一来，我们证明了存在一个三角形而其内角和等于 π，同时也证明了欧几里得第五公理.

这个证明的错误在于假设存在三角形而其内角和到达它的上确界（它等价于欧几里得第五公理）. 在非欧几何里，π 与三角形内角和的差与三角形的面积成比例，而且假设这个差趋近于零，则此三角形缩成一点.

定理 1 可以推广到所谓半连续泛函的情形. 泛函 $f(x)$ 是下（上）半连续的，如果条件 $x_n\to x$ 蕴含

$$f(x)\leqslant\varliminf_{n} f(x_n)$$

$$(f(x)\geqslant\varlimsup_{n} f(x_n)).$$

对这样泛函有下述定理成立.

定理 2 定义在自列紧集上的下（上）半连续泛函 $f(x)$ 在此集上下（上）有界，而且达到它的下（上）确界.

这个定理在变分学上有很广泛的应用，因为在那里这所讨论的一类最重要的泛函是半连续的.

距离空间内集的紧性判别法 现在我们给出距离空间内集的紧性的一般判别法. 为此首先引入下述定义:

距离空间X的集N称为同空间的集M的一个ε-网，如果对任一点 $x\in M$ 存在点 $x_\varepsilon\in N$ 使

$$\rho(x, x_\varepsilon) < \varepsilon.$$

特别M可能与整个空间重合.

定理 3 (Hausdorff) 为使距离空间X的集 K 为紧是必要条件,而且在X为完备时也是充分条件,乃是对任意 $\varepsilon > 0$ 存在对K的有限 ε-网.

必要性. 设K为紧的. 设x为K的任一点. 如果 $\rho(x, x_1) < \varepsilon$ 对所有 $x\in K$, 那么有限 ε-网已经构造出. 如果此事不成立，存在点 $x_2\in K$ 使 $\rho(x_1, x_2)\geqslant\varepsilon$. 如果对任意点 $x\in K$ 总有 $\rho(x,x_1) < \varepsilon$ 或 $\rho(x,x_2) < \varepsilon$, 那么有限 ε-网已经构造出. 否则,可求出一点 x_3 使

$$\rho(x_1, x_3)\geqslant\varepsilon \quad \rho(x_2, x_3)\geqslant\varepsilon.$$

这样继续下去,我们可以得到点 $x_1, x_2, \cdots x_n$,使

$$\rho(x_i, x_j)\geqslant\varepsilon$$

对 $i\neq j$. 这时有两种可能,一即依照上述方法到 k 步以后就完成了,即是说,对任一 $x\in K$, 它必将满足不等式

$$\rho(x, x_i) < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \cdots k$$

之一. 在此情形下，$x_1, x_2, \cdots, x_k$ 构成对K的一个 ε-网[1].

否则,上述构造点 x_i 的方法就会无限地继续下去. 但这个可能性是被排除的,因为如果它成立的话,那么我们将得出含于K的一个无穷点列 $x_1, x_2, \cdots, x_n\cdots$ 使得

---

1) 值得注意,这个 ε-网的点由K的点所组成.

$$\rho(x_i, x_j) \geqslant \varepsilon$$

对 $i \neq j$，从而序列自身及其任一子序列均不收敛，而这与集K的紧性相矛盾．

充分性．设空间X为完备的，且对任一 $\varepsilon > 0$ 存在对K的有限 ε-网．取数列$\{\varepsilon_n\}$使 $\lim\limits_n \varepsilon_n = 0$，而且对每一 ε_n 构造对K的有限 ε_n-网

$$\{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_{k_n}^{(n)}\}.$$

我们取任一无穷子集 $T \subset K$．沿每一点 $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_{k_1}^{(1)}$ 作半径为ε_1的闭球．那么T的每一点必含于这些球之一．因为这些球的数目有限，所以至少有一个球含T的一个无穷集．用T_1代表T的这个子集．取点 $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \cdots, x_{k_2}^{(2)}$ 并沿每一点作一半径为ε_2的闭球．推理如上，可得一个无穷集 $T_2 \subset T_1$ 完全含于我们所构造的半径为ε_2的闭球．以此类推，得出集T的一个无穷子集序列 $T_1 \supset T_2 \supset \cdots \supset T_n \supset \cdots$，而且 T_n 含于半径为 ε_n 的闭球，从而 T_n 的任两点的距离不超过 $2\varepsilon_n$．

今取点 $\xi_1 \in T_1$，点 $\xi_2 \in T_2$ 且异于 ξ_1，再取 $\xi_3 \in T_3$ 且异于 ξ_1 和 ξ_2．以此类推．

我们得出T的点的某一序列

$$T_\omega = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots\}.$$

这个序列自收敛．事实上，$\xi_n \in T_n$ 且 $\xi_{n+p} \in T_{n+p} \subset T_n$ 对任意自然数 p．从而

$$\rho(\xi_{n+p}\, \xi_n) < 2\varepsilon_n \to 0$$

对 $n \to \infty$ 和 $p > 0$．依条件，空间X完备，所以序列 T_ω 收敛于某一点 $\xi \in X$．从而集K的紧性得证．

推论1 为使完备距离空间X的集K为紧集，只须对任一 $\varepsilon > 0$ 存在对K的紧 ε-网．

设N为对K的紧$\frac{\varepsilon}{2}$网．对N应用前述定理，可知存在对N的有限$\frac{\varepsilon}{2}$-网N_0．那么N_0是对K的有限ε-网．事实上，对任一点$x\in K$，存在$\xi\in N$使

$$\rho(x, \xi) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

随之对$x\in N$存在点$x_\varepsilon\in N_0$使

$$\rho(\xi, x_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

从而对任一点$x\in K$在N_0找到这样点x_ε使

$$\rho(x, x_\varepsilon) \leqslant \rho(x, \xi) + \rho(\xi, x_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

即N_0是对K的有限ε-网．

又因空间X是完备的，所以再依前述定理可知K为紧集．

推论 2 紧空间X是可分的．

事实上，取序列$\{\varepsilon_n\}$，$\varepsilon_n\to 0$．对每一ε_n构造有限ε_n-网．

$$N_n = \{x_i^{(n)}\}_{i=1, 2, \cdots, k_n}.$$

令$N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$．显然$N$是可数集且在$X$内稠密．

推论 3 距离空间内紧集K有界．

令$N = \{x_1, \cdots, x_n\}$是对k的1-网，且a为空间X一个固定元．此外令

$$d = \max_i \rho(a, x_i).$$

显然对任一点$x\in K$有

$$\rho(x, a) \leqslant 1 + d.$$

这就是所要证明的.

现在再引入自紧集的判别法，而它也可以取做这个概念的定义.

空间X的一族开集$\{G_\alpha\}$称为集$M\subset X$的一个开复盖，如果每一点$x\in M$至少属于这个集族的集G_α之一.

定理4 为使距离空间X的闭集F为自紧的,必须且只须对F的任一开复盖总可选一有限开复盖.

必要性. 设$\{G_\alpha\}$为自紧集F的一个开复盖,而且从它当中不可能选一有限开复盖. 取序列$\{\varepsilon_n\}$收敛于零. 设$x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, $\cdots$ $x_{k_1}^{(1)}$是对F的ε_1-网. 于是

$$F=\bigcup_{i=1}^{k_1}F_i,$$

式中
$$F_i=\bar{S}(x_i^{(1)},\varepsilon_1)\cap F.$$
不难看出F_i为自紧集而其直径不超过$2\varepsilon_1$. 如果F不可能由$\{G_\alpha\}$中的任一有限子族复盖，那么至少对集F_i之一也如此. 设F_{i_1}为这样一个集,即它不可能由族$\{G_\alpha\}$的任一有限子族复盖.

同样推理，由F_{i_1}可选自紧子集$F_{i_1i_2}$其直径不超过$2\varepsilon_2$，而且不可能由族$\{G_\alpha\}$的任一有限子族复盖. 以此类推，我们得出一序列的相互包含的紧闭集

$$F_{i_1}\supset F_{i_1i_2}\supset\cdots\supset F_{i_1i_2\cdots i_n}\supset\cdots$$

而其直径趋近于零.

令x_0属于所有的集$F_{i_1i_2,\cdots i_n}$, $n=1,2,\cdots$. 因为族$\{G_\alpha\}$构成集F的一个开复盖且$x_0\in F$,所以存在集G_{α_0}含有此点. 既然G_{α_0}是开集，就存在点x_0的一个邻域$S(x_0,\varepsilon)$完全含于G_{α_0}. 今选n充分大使$F_{i_1i_2\cdots i_n}$的直径小于ε. 那么显然

$$F_{i_1i_2\cdots i_n}\subset S(x_0,\varepsilon)\subset G_{\alpha_0}$$

这样就导出一个矛盾．因为一方面根据构造知集 $F_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 不可能含于 $\{G_\alpha\}$ 的任一有限子族．而在另一方面它由 G_{α_0} 复盖．

从而由 F 的每一开复盖都可以选择有限开复盖．这就证明了必要性．

充分性．设由集 F 的每一开复盖可选有限开复盖．设 F 的子集 M 没有聚点．那么对每一点 $x \in F$ 存在邻域 $S(x, \varepsilon_x)$ 可能除去点 x 外不含 M 的点．这些邻域构成集 M 的一个开复盖．由它可选有限开复盖

$$S(x_1, \varepsilon_1)\ S(x_2, \varepsilon_2), \cdots, S(x_n, \varepsilon_n).$$

因为整个 M 含于这些邻域而且又因为每一个这样的邻域最多含 M 一个点．所以 M 为有限集，换句话说，每一无穷子集 $M \subset F$ 必须有聚点，所以 F 为紧的．

如果集族的任一有限子族具有非空的交，则称它为**中心的**．

定理5 为使距离空间的闭集 F 为紧的，必须且只须集 F 的任一个闭子集所成的中心族具有非空的交．

必要性．设 F 自紧，设 $\{F_\alpha\}$ 为集 F 的闭子集中心族．其交为空集．令 $G_\alpha = CF_\alpha$，其中 CF_α 代表 F_α 的余集．那么 G_α 为开集且 $\bigcup\limits_{\alpha} G_\alpha = C \bigcap\limits_{\alpha} F_\alpha = X$．因此集族 $\{G_\alpha\}$ 构成 F 的一个开复盖．从而由它可选有限子族复盖 F：

$$G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \cdots, G_{\alpha_n}.$$

因为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i} \supset F$，所以

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} = C \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i} \subset CF. \tag{2}$$

但在另一方面，$F_{\alpha_i} \subset F$，所以

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} \subset F \tag{3}$$

由(2)和(3)知 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} = \varnothing$，而这与 $\{F_\alpha\}$ 为中心族相矛盾．必要性证完．

充分性．设 F 的任一闭子集中心族有非空的交．考虑 F 的任一开复盖 $\{G_\alpha\}$．令

$$F_\alpha = F \backslash G_\alpha = F \cap CG_\alpha.$$

集 F_α 闭且

$$\bigcap_{\alpha} F_\alpha = F \Big\backslash \bigcup_{\alpha} G_\alpha = \varnothing.$$

因此族 $\{F_\alpha\}$ 是非中心的，从而存在子族 $F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, \cdots, F_{\alpha_n}$ 其交为空集．于是对应的开集

$$G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \cdots, G_{\alpha_n}$$

满足

$$\bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i} \supset F \Big\backslash \bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} = F.$$

这就证明了由 F 的任一开复盖 $\{G_\alpha\}$ 可选有限开复盖．

定理 6 距离空间 X 内每一自紧集都是 Cantor 完全集的连续像．

设 K 是距离空间 X 的自紧集．考虑收敛于零的序列 $\{\varepsilon_n\}$，而且对每一 $n = 1, 2, \cdots,$ 构造对 K 的有限 ε-网． $\{x_i^{(n)}\}$，$i = 1, 2, \cdots, m_n$． 如果有必要的话我们添加补充点而常可设 $m_n = 2^{k_n}$．考虑半径为 ε_1 中心在 $x_i^{(1)}$ 的球 $S_i^{(1)}$，集 K 完全含于这些球，从而含于这些闭球 $\bar{S}_i^{(1)}$． 令 $K_{i_1} = K \cap \bar{S}_{i_1}^{(1)}$ $i_1 = 1, \cdots m_1$．我们得出了集 K 表示为 m_1 个直径不超过 $2\varepsilon_1$ 的闭集的并．作为自紧集的闭子集，每一 K_{i_1} 仍为自紧集．重复上述构造，我们可表示每一 K_{i_1} 为 m_2 个直径不超过 $2\varepsilon_2$ 的闭集

$K_{i_1 i_2}$ 的并。$i_2 = 1, 2, \cdots, m_2$。以此类推，所有这些集可以看成非空。

现在回到 Cantor 的完全集 P_0，这个集完全含于 k_1 阶闭区间 $\Delta_{i_1, i_2, \ldots, i_{k_1}}$，$j_l = 0, 1$，而且也完全含于$(k_1 + k_2)$阶闭区间 $\Delta i_1, i_2, \ldots, i_{k_1+k_2}$。照此类推，把 k_1 阶闭区间从左到右排列且用 $\tilde{\Delta}_{i_1}$ 代表它，$i_1 = 1, 2, \cdots, m_1 = 2^{k_1}$。在每一 k_1 阶闭区间 $\tilde{\Delta}_{i_1}$ 内含 $2^{k_2} = m_2$ 个 $(k_1 + k_2)$ 阶闭区间。从左到右排列它并用 $\tilde{\Delta}_{i_1 i_2}$，$i_2 = 1, 2, \cdots, m_2$ 表示。以此类推我们得出空间 X 闭集 $F_{i_1 i_2 \cdots i_S}$ 与$[0,1]$的闭区间 $\tilde{\Delta}_{i_1 i_2 \cdots i_S}$ 之间的一个一一对应。

任取点 $t \in P_0$。它唯一地确定了一系含它的而且退缩于它的闭区间 $\tilde{\Delta}_{i_1}$，$\tilde{\Delta}_{i_1 i_2}$，$\tilde{\Delta}_{i_1 i_2 i_3}, \cdots$。我们考虑对应的闭集系 K_{i_1}，$K_{i_1 i_2}$，$K_{i_1 i_2 i_3} \cdots$（与闭区间同一下标），因为这些集的每一个总含于前一个而且这些集的直径趋近于零，所以存在唯一点 $x \in K$ 属于所有集。我们令此点与点 $t \in P_0$ 相对应。

我们来证明每一点 $x \in K$ 都是某一点 $t \in P_0$ 的像。事实上，$x \in K_{i_1}$ 对某一下标值 i_1（这个下标一般不是唯一确定的，因为集 K_{i_1} 可以相交），同样 $x \in K_{i_1 i_2}$ 等等。对于集 K_{i_1}，$K_{i_1 i_2}$，$\cdots$ 有闭区间 $\tilde{\Delta}_{i_1}$，$\tilde{\Delta}_{i_1 i_2}$，$\cdots$ 与之对应。属于所有这些闭区间的点 t 以所考虑的 x 为像。这样一来，我们定义了一个由 Cantor 完全集 P_0 到自紧集 K 上的一个单值映像 $x = \varphi(t)$。我们来证明这个映像连续。

设 $x_0 = \varphi(t_0)$ 且 $S(x_0, \varepsilon)$ 为点 x_0 的一个邻域。取退缩于 x_0 的集系中的这样的某 $K_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 使其直径小于 ε。于是 $K_{i_1 i_2 \cdots i_n} \subset S(x_0, \varepsilon)$。用 δ 代表 t_0 到与集 $K_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 对应的区间 $\tilde{\Delta}_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 的最近端点之间的距离。如果 $|t - t_0| < \delta$，那么 $t \in \tilde{\Delta}_{i_1 i_2 \cdots i_n}$，从而

$$x = \varphi(t) \in K_{i_1 i_2 \cdots i_n} \subset S(x_0, \varepsilon),$$

因此 $\rho(x, x_0) < \varepsilon$. 定理完全证毕.

现在讨论紧距离空间X到距离空间Y内的映象f.

定理 7 紧空间的连续像为紧空间.

事实上设$\{y_n\}$为 $f(X)\subset Y$ 内任一序列. 对每一 y_n 取它的原像之一 x_n. 因为 $\{x_n\}\subset X$. 而X为紧空间,所以由 $\{x_n\}$ 可选收敛子序列$\{x_{n_k}\}$收敛于 $x_0\in X$. 因为 $f(x)$ 连续,所以

$$f(x_{n_k}) = y_{n_k} \to y_0 = f(x_0) \in f(X).$$

这就是说, $f(X)$ 的任一序列都含收敛子序列而且这样子序列的极限属于 $f(X)$. 从而 $f(X)$ 为紧空间.

§2 某些函数空间中的紧性判别法

$C[0, 1]$ 内紧性判别法 某一集M的函数称为一致有界的,如果存在这样常数 c 使 $|x(t)| \leqslant c$ 对所有 $x(t)\in M$ 和任一 $t\in[0, 1]$. 此集M称等度连续的,如果任给 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 仅依赖于 ε 使得对$[0,1]$内满足不等式 $|t_1 - t_2| < \delta_2$ 的任意 t_1 和 t_2 以及对M的任意函数 $x(t)$ 有

$$|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon.$$

定理 1 (Arzelà) 为使集 $K\subset C[0,1]$ 为紧的. 必须且只须函数 $x(t)\in K$ 一致有界且等度连续.

必要性. 设K紧. 函数 $x(t)\in K$ 的一致有界性由前节定理 3 推论 3 得出. 我们来证明函数 $x(t)\in K$ 的等度连续性. 对给定的 $\varepsilon > 0$, 构造对K的 $\frac{\varepsilon}{3}$-网, $\{x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)\}$. 因为函数 $x_i(t)$ 在$[0,1]$连续,所以它在此闭区间一致连续.

对每一函数 $x_i(t)$ 选 δ_i 使

$$|x_i(t_1) - x_i(t_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

对 $|t_1-t_2|<\delta_i$ 和[0,1]内任意选择的 t_1 和 t_2。设 δ 为 δ_i，$i=1,2,\cdots,k$ 中的最小者. 那么对任意函数 $x(t)\in K$ 及 $|t_1-t_2|<\delta$ 我们有

$$\begin{aligned}&|x(t_1)-x(t_2)|\\ \leqslant&\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)-x_i(t)|+|x_i(t_1)-x_i(t_2)|\\ &+\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x_i(t)-x(t)|<2\rho\ (x,x_i)+\frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

如果选 $x_i(t)$ 使

$$\rho(x,x_i)<\frac{\varepsilon}{3},$$

那么
$$|x(t_1)-x(t_2)|<\varepsilon.$$
对 $|t_1-t_2|<\delta$ 成立.此 δ 既不依赖于[0,1]的点 t_1 和 t_2 而且更不依赖于 K 内函数 $x(t)$ 的选择. 这就证明了属于 K 的函数的等度连续性.

充分性. 由定理的条件对任意 $\varepsilon>0$ 可选 $\delta>0$ 使

$$|x(t_1)-x(t_2)|<\varepsilon$$

对 $|t_1-t_2|<\delta$，t_1，$t_2\in[0,1]$ 任意和任意 $x(t)\in K$ 成立. 取自然数 n 使 $\frac{1}{n}$ 小于 δ. 分割[0,1]为 n 个相等部分

$$\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right],\ k=0,1,2,\cdots n-1.$$

那么

$$|x(t_1)-x(t_2)|<\varepsilon$$

对任意函数 $x(t)\in K$ 和使

$$|t_1-t_2|<\frac{1}{n}$$

的任意 t_1，$t_2\in[0,1]$ 成立. 特别对属于同一部分区间 $\left[\frac{k}{n},\right.$

$\left.\frac{k+1}{n}\right]$ 的 t_1 和 t_2 成立.

对每一函数 $x(t)$ 作连续函数 $x_n(t)$ 使

1) $x_n\left(\frac{k}{n}\right)=x\left(\frac{k}{n}\right)$ 对 $k=0,1,\cdots,n-1$,

2) 在区间 $\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$ 上函数 $x_n(t)$ 线形的.

因此 $x_n(t)$ 的图形是一折线具有 n 个顶点在 $x(t)$ 的图形上.

设
$$x\left(\frac{k}{n}\right)\leqslant x\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

那么由于 $x_n(t)$ 在 $\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$ 上是直线,所以有

$$x\left(\frac{k}{n}\right)\leqslant x_n(t)\leqslant x\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

由此

$$-\varepsilon<x(t)-x\left(\frac{k+1}{n}\right)\leqslant x(t)-x_n(t)$$
$$\leqslant x(t)-x\left(\frac{k}{n}\right)<\varepsilon.$$

如果
$$x\left(\frac{k+1}{n}\right)\geqslant x\left(\frac{k}{n}\right),$$

我们得

$$-\varepsilon<x(t)-x\left(\frac{k}{n}\right)\leqslant x(t)-x_n(t)$$
$$\leqslant x(t)-x\left(\frac{k+1}{n}\right)<\varepsilon.$$

从而

$$|x(t)-x_n(t)|<\varepsilon$$

对所有 $t \in [0,1]$，即

$$\rho(x, x_n) < \varepsilon.$$

这就是说，函数 $x_n(t)$ 的集 N 构成对 K 的一个 ε-网. 此处由于集 K 的一致有界性

$$|x_n(t)| \leqslant |x(t)| + |x(t) - x_n(t)| < c + \varepsilon = c_1,$$

即集 N 一致有界.

对每一函数 $x_n(t) \in N$ 使 $(n+1)$ 维空间 $\tilde{X}$ 的点与之对应，而此点的坐标即为 $x_n(t)$ 的图形的顶点的纵坐标. 不难看出这个对应是一对一的，而且也是在这样的意义下两方连续的，即若函数列 $\{x_n^{(k)}(t)\}$ 在空间 $C[0,1]$ 的距离意义下收敛于 $x_n^{(0)}(t)$，那么点列 $\{\tilde{x}^{(k)}\}$ 在空间 E_{n+1} 的距离意义下收敛于点 $\tilde{x}^{(0)}$. 但集 $\tilde{N} = \{\tilde{x}\}$ 有界，从而在 E_{n+1} 内紧. 因此集 $N = \{x_n(t)\}$ 在 $C[0,1]$ 内紧.

因此对任一 $\varepsilon > 0$ 可以构造对 K 的紧 ε-网. 再由 $C[0,1]$的完备性以及前节定理 3 推论 1 知 K 紧.

证明的定理可以推广到紧集到紧距离空间内的映象上去.

设给定两个距离空间 X 和 Y 以及映空间 X 于空间 Y 内的映象 f 的集 F. 映象 $f \in F$ 称有界的，如果对任意 $x \in X$

$$\rho(f(x), \theta) \leqslant c_f,$$

式中 θ 是空间 Y 内某一固定元且 c_f 为常数一般依赖于映像 f. 映像 $f \in F$ 称**一致连续的**，如果对任意 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 使得

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

对空间 X 内满足 $\rho(x_1, x_2) < \delta$ 的任意两点 $x_1 x_2$ 成立.

设 $M(X, Y)$ 是空间 X 到 Y 内所有有界映象的集. 我们可以引入距离使 $M(X, Y)$ 为一距离空间. 令

$$\rho(f, \varphi) = \sup_{x \in X} \rho(f(x), \varphi(x))$$

不难看出，距离的所有公理被满足．又空间 $M(X, Y)$ 内的收敛是映象序列 $\{f_n(x)\}\subset M(X, Y)$ 在 X 上一致收敛于映像 $f(x)\in M(X, Y)$.

如果 Y 是完备空间，那么 $M(X, Y)$ 也是完备空间.

事实上，如果 $\rho(f_n, f_m)\to 0$ 对 n 和 $m\to\infty$，那么对任一 $\varepsilon>0$ 可定 $n_0(\varepsilon)$ 使当 $n, m\geqslant n_0(\varepsilon)$ 和所有 $x\in X$ 有

$$\rho(f_n(x), f_m(x))<\varepsilon. \tag{1}$$

由于空间 Y 的完备性，所以自收敛的函数列 $\{f_n(x)\}$ 收敛于某一元 $y\in Y$. 令

$$f(x)=y=\lim_n f_n(x),$$

那么我们就得出空间 X 到 Y 内的某一映象.

在不等式(1)中令 $m\to\infty$ 可得

$$\rho(f_n(x), f(x))\leqslant\varepsilon$$

对所有 $n\geqslant n_0(\varepsilon)$ 和所有 $x\in X$ 成立．由此可知 $f\in M(X, Y)$ 且 $f_n(x)\to f(x)$ 在 X 上一致成立.

用 $C(X, Y)$ 代表 $M(X, Y)$ 内所有一致连续映象的集．不难看出，一致连续映象的一致收敛序列的极限也是一致连续映象，由此可知集 $C(X, Y)$ 在空间 $M(X, Y)$ 内为闭的.

最后还要引入一个定义．含于某族 $Q\subset C(X, Y)$ 的映象 f 称为**等度连续的**，如果对任意 $\varepsilon>0$ 存在仅依赖于 ε 的 $\delta>0$ 使得

$$\rho(f(x_1), f(x_2))<\varepsilon$$

对所有 $f\in Q$ 和满足 $\rho(x_1, x_2)<\delta$ 的所有 $x_1, x_2\in X$ 成立.

定理 2 **为了使映 X 的紧集于紧空间 Y 的连续映象族 Q 内可以选取一致收敛序列，必须且只须映象族 Q 等度连续.**

我们只证条件的充分性.

首先注意，Y 作为紧距离空间是有界的. 从而族 Q 的所有映象是一致有界的.

因此 $Q\subset C(X, Y)$. 因为 $C(X, Y)$ 在 $M(X, Y)$ 内闭，所以为了证明 Q 在 $C(X, Y)$ 内紧性，只须断定它在 $M(X, Y)$ 内的紧性.

对任意 $\varepsilon>0$，可选 $\delta>0$ 使

$$\rho(f(x_1), f(x_2))<\frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

对 $\rho(x_1x_2)<\delta$ 和所有 $f\in Q$. 由映象的等度连续性这是可能的. 在集 X 内取有限 $\frac{\delta}{2}$ 网 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. 再引入集

$$X_i=S\left(x_i, \frac{\delta}{2}\right)\Big\backslash\bigcup_{j\neq i} S\left(x_j, \frac{\delta}{2}\right).$$

这些集互不相交，其并为 X 而且每一 X_i 的直径不超过 δ. 此外设 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是对紧空间 Y 的 $\varepsilon/2$-网. 考虑所有可能的函数 $g(x)\in M(X, Y)$，它在集 X_i 上取常数值 y_j. 这些函数构成对 Q 的有限 ε-网. 事实上，取任意映象 $f\in Q$. 对任意 $x\in X$ 和任意 $g(x)$ 我们有

$$\begin{aligned}&\rho(f(x), g(x))\\ \leqslant\ &\rho(f(x), f(x_i))+\rho(f(x_i), g(x_i))\\ &+\rho(g(x_i), g(x)),\end{aligned}$$

式中 x_i 是这样选择的使得 $x\in X_i$. 因此由(2)以及 x 和 x_i 属于同一集 X_i,

$$\rho(f(x), f(x_i))<\frac{\varepsilon}{2}, \quad \rho(g(x), g(x_i))=0,$$

由此

$$\rho(f(x), g(x))<\frac{\varepsilon}{2}+\rho(f(x_i), g(x_i)).$$

我们选 $g(x)$ 使得 $g(x_i)=y_j$ 满足不等式

$$\rho(f(x_i),\ y_j) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是对任意 $x \in X$

$$\rho(f(x), g(x)) < \varepsilon,$$

从而 $$\rho(f, g) = \sup_x \rho(f(x), g(x)) \leqslant \varepsilon.$$

作为完备距离空间 $M(X, Y)$ 的子集有有限 ε-网，所以集 Q 是紧的．定理证完．

空间 $L_p[0, 1]$ 内紧性判别法 设 $x(t) \in L_p[0, 1]$．扩张函数 $x(t)$ 的定义域于$[0,1]$之外，而令 $x(t) = 0$ 如果 t 在这个闭区间之外．那么对数轴上任意区间$[a, b]$积分

$$\int_a^b |x(t)|\,dt \quad 和 \int_a^b |x(t)|^p\,dt$$

有意义．

$L_p[0, 1]$ 内紧性判别法（M. Riesz 定理）．为使函数族

$$K = \{x(t)\} \subset L_p[0, 1]$$

为紧集，必须且只须此族的函数依范数一致有界而且依平均等度连续，即

1. $\int_0^1 |x(t)|^p\,dt \leqslant c^p$,

2. $\int_0^1 |x(t+h) - x(t)|^p\,dt < \varepsilon^p$ 对 $0 < h < \delta(\varepsilon)$ 和此族所有函数成立．

必要性． 条件 1 的必要性是显然的．现在来证明条件 2 被满足．因为K为紧集．所以对任意 $\varepsilon > 0$，对此集存在有限 $\frac{\varepsilon}{3}$-网 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$．又因为 $L_p[0, 1]$ 内每一函数依平均连续，所以对任意 i 存在 δ_i 使

$$\int_0^1 |x_i(t+h) - x_i(t)|^p\,dt < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p$$

对 $0<h<\delta_i$。令 $\delta=\min\limits_i \delta_i$。于是

$$\int_0^1 |x_i(t+h)-x_i(t)|^p dt < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p$$

对 $0<h<\delta$ 和对所有 $i=1, 2, \cdots n$。

取任意函数 $x(t)\in K$。存在函数 $x_i(t)$ 使

$$\int_0^1 |x(t)-x_i(t)|^p dt < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p.$$

对 $0<h<\delta$ 我们有

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^1 |x(t+h)-x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \left(\int_0^1 |x(t+h)-x_i(t+h)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + \left(\int_0^1 |x_i(t+h)-x_i(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + \left(\int_0^1 |x_i(t)-x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&< \left(\int_0^1 |x(t+h)-x_i(t+h)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{2\varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 |x(t+h)-x_i(t+h)|^p dt \\
&= \int_h^1 |x(s)-x_i(s)|^p ds \\
&\leqslant \int_0^1 |x(s)-x_i(s)|^p ds < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p.
\end{aligned}$$

(在此我们利用了 $x(t)$ 和 $xi(t)$ 在[0, 1]外为零)。由最后这两个不等式可得

$$\left(\int_0^1 |x(t+h)-x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

对 $0<h<\delta$，而且因为 $x(t)$ 为K内任一函数，所以条件 2 的必要性得证。

充分性．我们考虑平均函数

$$x_h(t) = \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} x(\tau)d\tau.$$

我们有

$$\begin{aligned}
|x_h(t)| &= \frac{1}{2h}\left|\int_{t-h}^{t+h} x(\tau)d\tau\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2h}\left(\int_{t-h}^{t+h} d\tau\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_{t-h}^{t+h} |x(\tau)|^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \left(\frac{1}{2h}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |x(\tau)|^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned} \tag{3}$$

又

$$\begin{aligned}
&|x_h(t+u) - x_h(t)| \\
&= \frac{1}{2h}\left|\int_{t+u-h}^{t+u+h} x(\tau)d\tau - \int_{t-h}^{t+h} x(\tau)d\tau\right| \\
&= \frac{1}{2h}\left|\int_{t-h}^{t+h} x(\tau+u)d\tau - \int_{t-h}^{t+h} x(\tau)d\tau\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} |x(\tau+u) - x(\tau)|d\tau \\
&\leqslant \left(\frac{1}{2h}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{t-h}^{t+h} |x(\tau+u) - x(\tau)|^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \left(\frac{1}{2h}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |x(\tau+u) - x(\tau)|^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned} \tag{4}$$

由条件 1 和 2 以及不等式(3)和(4)可知对固定的 h 函数族 $\{x_h(\tau)\}$ 对 $x(t)\in K$ 一致有界且等度连续．从而函数族 $\{x_h(t)\}$ 在一致收敛意义下是紧的，从而在 p 幂平均收敛意义下也是如此．在另一方面

$$\begin{aligned}
|x(t) - x_h(t)| &\leqslant \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} |x(t) - x(\tau)|d\tau \\
&= \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} |x(t) - x(t+\tau)|d\tau
\end{aligned}$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{2h}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{-h}^{h} |x(t) - x(t+\tau)|^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}}.$$

由此

$$\int_0^1 |x(t) - x_h(t)|^p dt$$

$$\leqslant \frac{1}{2h}\int_0^1 \left\{\int_{-h}^{h} |x(t) - x(t+\tau)|^p d\tau\right\} dt$$

$$= \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \left\{\int_0^1 |x(t) - x(t+\tau)|^p dt\right\} d\tau$$

$$< \frac{1}{2h}\varepsilon^p \int_{-h}^{h} d\tau = \varepsilon^p,$$

这是因为（由条件 2）$\int_0^1 |x(t+\tau) - x(t)|^p dt < \varepsilon^p$，如果 $|\tau| < \delta$的话.因此函数族$\{x_h(t)\}$构成对K的 ε-网，而且因为这个 ε-网是紧的，依 Hausdorff 定理的推论集 K 自身是紧的.

现在我们再介绍 $L_p[0,1]$ 空间内集的两个紧性判别法，但不加证明.

定理 (А. Н. Колмогоров) 集 $K \subset L_p[0,1]$ 是紧的当且仅当

1) 函数 $x(t) \in K$ 的范数依全体有界，

2) 对任意 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 使

$$\|x - x_h\| < \varepsilon$$

对 $h < \delta$ 和所有函数 $x(t) \in K$.

我们说，函数族 $M = \{x(t)\}$ 有等度绝对连续范数，如果对每一 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 使得当 $\mathrm{mes}E < \delta$ 时

$$\|x(t)\chi_E(t)\| < \varepsilon.$$

(在此 $\chi_E(t)$ 是可测集 E 的特征函数).

定理 (М. А. Красносельский [16]) 设函数族 $K \subset L_p$

[0,1]有等度绝对连续范数而且在依测度收敛意义下是紧的，那么这个族在平均收敛意义下也是紧的.

空间 Q 中的紧性判别法 考虑由方程

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1 \tag{5}$$

给定的曲线的全体$\{q\}$. 式中 $x(t)$, $y(t)$, 和 $z(t)$ 是参数的连续函数. 假如给定两个曲线 p 和 q, 把它们的方程写成(5)式的形式后，我们使这两个曲线上具有同一参数值的点相互对应. 令 d 代表在这两个曲线间的对应点之间的距离的极大值. 数 d 依赖于曲线的参数表示的选择，我们令 $\rho(p,q)$ 代表对所有可能的参数表示所对应的数 d 的 F 确界.

不难验证这样在曲线间引入的距离满足距离公理. 这样得出的空间称空间 Q. 这个空间在变分学里起着重要的作用. 可以证明 Q 是完备空间.

定理 (Hilbert) 位置在空间的有限部分且其长度全体有界的可求长曲线的全体 $K \subset Q$ 为紧集.

设曲线 $q \in K$ 的长度不超过 l. 我们把每一曲线分成长度相等的 n 个弧并用线段联结这些分点. 这样我们就得出折线 q_n. 而曲线 q 的每一个弧所对应的折线 q_n 的边长不超过 $\frac{l}{n}$. 这样一个弧上的点和内接于它的弦——折线 q_n 的边长——不超过 $\frac{2l}{n}$. 在 q 和 q_n 上引入这样参数表示，使在折线 q_n 的顶点处的这两个参数表示法的对应参数值都是形如 $\frac{k}{n}, k = 0, 1, \cdots n$ 的数，并且使当 t 通过区间 $\left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)$ 时我们得出曲线 q 的弧和折线 q_n 的对应边. 对应于同一参数值的曲线 q 上的点和折线 q_n 上的点的距离不超过 $\frac{2l}{n}$. 从而

$$\rho(q, q_n) \leqslant \frac{2l}{n}.$$

因此折线 q_n 的全体 K_n 构成对K的 $\frac{2l}{n}$-网．但每一折线由它 $n+1$ 个顶点的 $3(n+1)$ 个坐标确定．依定理的条件它们就全体有界．所以 K_n 是紧的．再由 §1 定理 3 推论 1 知K紧．

这个定理被用来证明测地线的存在．

具有基的空间的紧性判别法 为使具有基的 Banach 空间E内的集K为紧的，必须且只须K为有界的而且对任意 $\varepsilon > 0$ 存在下标 n_0 使得 $\|R_n x\| < \varepsilon$ 对 $n \geqslant n_0$ 和K内任意 x[1]．

必要性．集K的有界性由 §1 定理 3 推论 3 可知．我们来证明它满足第二条件

取某一数 $\eta > 0$ 并构造对K的 η-网：$\{x_1, \cdots, x_k\}$．对任意 $x \in K$ 可定 x_i，它属于K的 η-网且 $\|x - x_i\| < \eta$．我们有

$$\begin{aligned}\|R_n x\| &= \|x - S_n x\| \leqslant \|x - x_i\| + \|x_i - S_n x\| \\ &\leqslant \|x - x_i\| + \|S_n x_i - S_n x\| + \|R_n x_i\| \\ &\leqslant (1 + \|A^{-1}\|)\|x - x_i\| + \|R_n x_i\| \\ &< (1 + \|A^{-1}\|)\eta + \|R_n x_i\|.\end{aligned}$$

对每一固定 x，$R_n x \to 0$ 对 $n \to \infty$．因此可定 n_0 使当 $n \geqslant n_0$ 时 $\|R_n x_i\| < \eta$ 对 $i = 1, 2, \cdots, k$，因此

$$\|R_n x\| < (2 + \|A^{-1}\|)\eta$$

对 $n \geqslant n_0$．为了得出所要的不等式只须取 $\eta = \dfrac{\varepsilon}{2 + \|A^{-1}\|}$，

---

1) 关于算子 S 和 R 可参考第 3 章 §6 的最后一段．关于算子 A^{-1} 也见第 3 章 §6．

这是因为 n_0 不依赖于 x 在 K 内怎样取.

充分性. 我们证明当定理的条件被满足时,对任意 $\varepsilon>0$ 存在对 K 的有限 ε-网. 为此,对给定的 ε, 选 n_0 使 $\|R_{n_0}x\|<\frac{\varepsilon}{2}$ 对所有 $x\in K$. 于是我们考虑集 K_{n_0}, 此集由形如 $S_{n_0}x$, $x\in K$ 的元所组成. 这个 K_{n_0} 可以看做由元 $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_{n_0}$ 定义的 n_0 维空间 $E_{n_0}\subset E$ 内的集. 此处由不等式

$$\|S_{n_0}x\|\leqslant\|A^{-1}\|\|x\|.$$

以及 K 的有界性知 K_{n_0} 有界,由此它也是紧的,从而在 E_{n_0} 内存在对 K_{n_0} 的有限 $\frac{\varepsilon}{2}$-网. 但这个网显然是对 K 的 ε-网, 定理证完.

空间 l_p 内紧性判别法 为了使集 $K\subset l_p$ 为紧的, 必须且只须集 K 有界且对任意 $\varepsilon>0$ 存在 n_0 仅依赖于 ε, 使 $\sum\limits_{i=n+1}^{\infty}|\xi i|^p<\varepsilon^p$ 对 $n\geqslant n_0$ 和对任意 $x=\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\cdots\}\in K$.

如果我们注意到

$$\|R_nx\|=\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

的话,证明由前面定理立刻得出.

例. 在 l_2 空间内考虑元 $x=\{\xi_i\}$, $0\leqslant\xi_n\leqslant\frac{1}{n}$, 的集. 即坐标 Hilbert 空间内基本立方体. 由前述判别法知道这个立方体是紧集. П. С. Урысон 证明了每一可分距离空间总同胚于空间 l_2 内基本立方体的某一子集[32].

有限维性与紧性 如所熟知, 在 n 维欧氏空间内每一有界集为紧集. 现在我们来证明有界集的紧性是有限维线性赋范空间的特征性质.

定理 4 为使线性赋范空间 E 的子空间 L 为有限维的，必须且只须 L 的每一有界集为紧集.

必要性. 设 L 为 n 维的. 那么 L 同胚于 n 维欧氏空间 E_n，有界集 $M\subset L$ 一对一地且两侧连续地变换成有界集 $N\subset E_n$，且因 N 在 E_n 内为紧的，所以 M 在 L 内也为紧的.

充分性. 设 L 内每一有界集为紧集. 在 L 内任取元 x_1 使 $\|x_1\|=1$. 用 L_1 代表由 x_1 所产生的子空间. 如果 $L=L_1$，那么定理证毕. 如果 L_1 不与 L 相重合，那么由第二章 § 3 引理知在 L 内存在元 x_2 使 $\|x_2\|=1$ 且

$$\|x_2-x_1\|\geqslant\frac{1}{2}.$$

用 L_2 代表由元 x_1 和 x_2 所产生的子空间. 那么存在两种可能性，或者 $L=L_2$ 从而定理证毕，或者 L_2 不与 L 重合. 那么依引理存在 x_3 使

$$\|x_3\|=1,\quad \|x_3-x_1\|\geqslant\frac{1}{2},\quad \|x_3-x_2\|\geqslant\frac{1}{2}.$$

继续这个程序. 那么可作两种假定. 或者对某一 n，L_n 与 L 相重合且从而定理证毕，或者我们构造了一个无穷序列 $\{x_n\}$ 使 $\|x_n\|=1$ 且 $\|x_n-x_m\|\geqslant\frac{1}{2}$ 对 $m\neq n$ 和任意 m,n. 但这第二个可能性必须排除，因为它是说存在有界 ($\|x_n\|=1$) 非紧 ($\|x_n-x_m\|\geqslant\frac{1}{2}$ 对 $n\neq m$) 集，而这与定理的条件相矛盾.

最佳逼近问题. Чебышев 研究过用已知函数的线性组合对函数作最佳逼近的问题. 遵照这里所采取的这个术语来研究空间 C，$L_{2,\rho}$[1]，L 等的近似问题.

---

1) 我们定义过复空间 $L_{2,\rho}$. 我们在这里将讨论实 $L_{2,\rho}$，它可以同样地定义.

我们来考虑对赋范空间E的任一元x用有限个线性无关元 $x_1, x_2, \cdots x_n \in E$ 的线性组合作最佳逼近的问题. 可以证明最佳逼近问题是可解的[2].

引理 使$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$无限增加时,函数

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = \|x - \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 - \cdots - \lambda_n x_n\| \to \infty.$$

我们有

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \geqslant \|\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n\| - \|x\|.$$

考虑参数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的另一连续函数

$$\psi(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = \|\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n\|.$$

在n维欧氏空间的球

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = 1$$

(这是一个自紧集)上,此函数达到极小值μ,而它大于零,这是因元$x_1, x_2, \cdots, x_n$线性无关. 设给定任意的$k > 0$. 若

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2} > \frac{1}{\mu}(k + \|x\|),$$

那么

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \geqslant \left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right\| - \|x\|$$

$$= \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2}\left\|\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2}} x_i\right\| - \|x\|$$

$$\geqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2}\,\mu - \|x\| > k,$$

引理证毕.

定理 存在实数 $\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \cdots, \lambda_n^{(0)}$ 使函数

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = \|x - \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 - \cdots - \lambda_n x_n\|$$

对 $\lambda_1 = \lambda_1^{(0)}, \lambda_2 = \lambda_2^{(0)}, \cdots, \lambda_n = \lambda_n^{(0)}$ 有最小值[1].

定理的结论是显然的，如果 x 线性相关于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. 为此我们设 x 不含于由元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 所产生的子空间. 首先 $\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$是它的变量的连续函数，而这可由下述不等式得出：

$$\begin{aligned}
&|\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) - \varphi(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)| \\
&= \left|\left\|x - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right\| - \left\|x - \sum_{i=1}^n \mu_i x_i\right\|\right| \\
&\leqslant \left\|\sum_{i=1}^n (\lambda_i - \mu_i) x_i\right\| \leqslant \sum_{i=1}^n |\lambda_i - \mu_i| \|x_i\| \\
&\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\lambda_i - \mu_i| \sum_{i=1}^n \|x_i\|.
\end{aligned}$$

由引理 $\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \geqslant \|x\|$ 在某一球

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \leqslant r^2$$

之外成立. 因为这个球是自紧的，所以 $\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 作为连续函数在它的某一点 $(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \cdots, \lambda_n^{(0)})$ 达到最小值 ν. 但 $\nu \leqslant \varphi(0, 0, \cdots, 0) = \|x\|$. 所以 ν 是函数 $\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 在点 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的整个空间上的最小值. 定理证完.

给出元 x 的最佳逼近的线性组合

$$\lambda_1^{(0)} x_1 + \lambda_2^{(0)} x_2 + \cdots + \lambda_n^{(0)} x_n$$

一般不是唯一的. 为了得出逼近式 $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ 的唯一性. 必须

---

1) 即是说，在由 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 所产生的有限维空间中存在元最接近于 x.

附加条件．例如在空间 $C[0,1]$ 内，考虑满足所谓 Чебышев 条件的函数系．然而可以指出某些空间，在其内最佳逼近是唯一被确定的．

空间 E 称狭义赋范的，如果对 $x \neq \theta$ 和 $y \neq \theta$ 等式 $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ 仅对 $y = \alpha x$ 成立，其中 $\alpha > 0$，现在不难证明，在狭义赋范空间中最佳逼近唯一确定．事实上，若存在两个线性组合 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ 和 $\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i$ 使得

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right\| = \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \right\| = d,$$

式中 $d = \min \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right\| > 0$，那么

$$\begin{aligned}\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i + \mu_i}{2} x_i \right\| &\leqslant \frac{1}{2} \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right\| \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \right\| \\ &= \frac{1}{2} d + \frac{1}{2} d = d.\end{aligned}$$

但因
$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i + \mu_i}{2} x_i \right\| \geqslant d,$$

所以
$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i + \mu_i}{2} x_i \right\| = d.$$

从而

$$\begin{aligned}\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i + \mu_i}{2} x_i \right\| &= \left\| \frac{1}{2}\left(x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right) \right\| \\ &\quad + \left\| \frac{1}{2}\left(x - \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \right) \right\|.\end{aligned}$$

再由空间的狭义赋范性

$$x - \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i = \alpha \left\{ x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right\}.$$

如果 $\alpha \neq 1$，那么 x 将是元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性组合，而依假设这是被排斥的．因此 $\alpha = 1$．于是

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) x_i = 0.$$

再由 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性无关性可得

$$\lambda_i = \mu_i, \quad i = 1, 2, \cdots n.$$

这就是所要证明的．

$L_p[0, 1]$ 和 l_p $p > 1$ 可作为狭义赋范空间的例子．空间 $C[0, 1]$ 不是狭义赋范的，为了证实这一点，只须考虑两个非负线性无关函数 $x(t)$ 和 $y(t) \in C[0, 1]$ 而在区间$[0,1]$的同一点有极大值．对这样函数显然有

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$$

但 $y \neq \alpha x$．读者可以验证 $L[0, 1]$ 和 l 也不是狭义赋范空间．

弱紧性 下述定理是非常重要的，而且在泛函分析的应用上经常要用到．

定理 5 若赋范空间 E 可分，那么共轭空间 E^* 内每一球是弱紧的，即是说，对任一个具有范数有界的线性泛函序列 $\{f_n\}$，它总含有一个子序列弱收敛于某一线性泛函 f_0[1]．

在讨论算子空间时曾证明过，这个空间在算子的按点收敛意义下是完备的．因为对线性泛函来说，弱收敛与按点收敛的概念重合，所以线性泛函空间 E^* 在弱收敛意义下是完

1) 这个一般称为 Banach-Alaoglu 的重要定理，并注意 E 的可分性的假设是不必要的．这定理可简述成：共轭空间单位球是弱*自紧的．——译者注

备的，因此只须证明，每一个具有界范数的线性泛函序列 $\{f_n\}$ 总含有一个弱自收敛的子序列. 不失一般性可设 $\|f_n\| \leqslant 1$，设 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 是 E 内可数稠密集. 因为

$$|f_n(x_1)| \leqslant \|f_n\|\|x_1\| \leqslant \|x_1\|,$$

所以 $\{f_n(x_1)\}$ 为有界数列. 因此它含有一个收敛子序列

$$f_{n_1^{(1)}}(x_1), f_{n_2^{(1)}}(x_1), \cdots, f_{n_k^{(1)}}(x_1), \cdots.$$

我们来考虑泛函序列 $\{f_{n_k^{(1)}}\}$.

因为

$$|f_{n_k^{(1)}}(x_2)| \leqslant \|x_2\|,$$

所以 $\{f_{n_k^{(1)}}(x_2)\}$ 为有界数列，因此由它可选出一个收敛子序列

$$f_{n_1^{(2)}}(x_2), f_{n_2^{(2)}}(x_2), \cdots, f_{n_k^{(2)}}(x_2), \cdots.$$

同理可以构造泛函序列 $\{f_{n_k^{(3)}}\}$ 在 x_3 收敛，其余类推. 这时必须注意，后面的每一子序列都是它前面的序列的一部分，因而它也在前面序列收敛的每一点上收敛.

构造《对角线序列》:

$$f_{n_1^{(1)}}, f_{n_2^{(2)}}, \cdots, f_{n_k^{(k)}}, \cdots$$

不难看出，这个子序列对我们所考虑的可数稠密子集的每一元 x_m 都收敛. 事实上，只须注意 $f_{n_m^{(m)}}, f_{n_{m+1}^{(m+1)}}, \cdots$ 是序列 $\{f_{n_k^{(m)}}\}$的子序列，而它依构造对 x_m 收敛. 因此整个序列 $\{f_{n_k^{(k)}}\}$ 在 x_m 收敛.

因为泛函序列 $\{f_{n_k^{(k)}}\}$ 的范数有界而且在 E 内稠密的集 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ 上收敛. 所以依第IV章§2定理2知序列 $\{f_{n_k^{(k)}}\}$ 弱收敛. 定理证完.

推论 在空间 l_p 及 $L_p[0,1]$ $(p>1)$内每一球是弱紧的.

这是因为 $l_p = l_q^*$, $L_p[0, 1] = L_q^*[0, 1]$, 且 l_q 及 $L_q[0,1]$ 可分.

§3 空间 $C[0,1]$ 的万有性

在 1923 年苏联数学家 П. С. Урысон 证明了，存在《万有》可分距离空间，即是说，这样一个空间，它含有子集等距于任一可分距离空间. 过不久，波兰数学家 S. Banach 和 S. Mazur 证明了万有空间之一是空间 $C[0,1]$.

Banach 和 Mazur 定理的证明用到共轭空间的弱紧性.

定理 1 每一 B 型可分空间 E 总等距同构于空间 $C[0,1]$的一个子空间.

设 S 是空间 E^* 的单位球 $\|f\|\leqslant 1$. 而且在 S 内收敛为线性泛函的弱收敛. 由 §2 定理 5 知 S 为自紧集. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 是空间 E 内单位球 $\|x\|\leqslant 1$ 上可数稠密集. 对任意泛函 $f\in S$ 令 $f(a_k)=\xi_k$, $|\xi_k|\leqslant 1$, $k=1,2,\cdots$. 若 $f_n \underset{W}{\rightarrow} f_0$ $(f_n, f_0\in S)$, 那么 $\xi_k^{(n)}=f_n(a_k)\rightarrow f_0(a_k)=\xi_k^{(0)}$. 因此，对每一 $f\in S$ 有空间 S 的元 $y=\{\xi_k\}$ $(\xi_k=f(a_k))$ 与之对应，而且 $f_n \underset{W}{\rightarrow} f_0$ 蕴含空间 s 的对应元的收敛，即 $y_n\rightarrow y_0$. 设 N 是空间 S 中与泛函 $f\in S$ 对应的元. 那么 N 是自紧集的连续象，从而也是自紧集. 反之，也不难看出，映象 N 到 S 上的映象也是连续的. 事实上，令 $f(a_k)=\varphi(a_k)$, $k=1,2,\cdots$ 对任意 $x\in E$, $\|x\|\leqslant 1$, 选择 a_{k_0} 使 $\|x-a_{k_0}\|<\varepsilon$. 于是

$$|f(x)-\varphi(x)|\leqslant|f(x-a_{k_0})|+|f(a_{k_0})-\varphi(a_{k_0})| + |\varphi(x-a_{k_0})|<2\varepsilon,$$

从而由于 ε 是任意的，$f(x)=\varphi(x)$, 即 $f=\varphi$.

此外，若 $f_n(a_k)\rightarrow f_0(a_k)$ $k=1,2,\cdots$ 那么由泛函的范数的有界性 $(\|f_n\|,\|f_0\|\leqslant 1)$ 可得 $f_n \underset{W}{\rightarrow} f_0$. 这就证明了对应 $S\longleftrightarrow N$ 的一对一以及两侧连续性.

依§1定理6，N作为距离空间自紧集是 Cantor 完全集 P_0 的连续象. 因此，对每一 $t\in P_0$ 有泛函 $f_t\in S$ 与之对应，而且所有 f_t 与 S 重合，此外对 $t_n\to t$ 有 $f_{t_n}\underset{W}{\to}f_t$.

任取一元 $x\in E$. 依泛函弱收敛定义

$$f_{t_n}(x)\to f_t(x)\quad 对\quad t_n\to t.$$

对固定 x，$f_t(x)$ 从而是 $t\in P_0$ 的连续函数，我们把它记作

$$\varphi_x(t)=f_t(x). \tag{1}$$

函数 $\varphi_x(t)$ 定义在 P_0 上，我们再在 Cantor 集的余区间上定义它为线性的且连续的. 这样我们就得出一个定义在[0, 1]上的连续函数，从而含于 $C[0,1]$. 依 $C[0,1]$ 内范数的定义我们有

$$\|\varphi_x\|_C=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|\varphi_x(t)|.$$

由于 $\varphi_x(t)$ 在 P_0 的余区间上是线性的，所以 $\varphi_x(t)$ 在[0, 1]的极大值与 $\varphi_x(t)$ 在 P_0 的极大值一致. 因此

$$\|\varphi_x\|_C=\max_{t\in P_0}|\varphi_x(t)|.$$

在另一方面，对 $t\in P_0$ 由(1)我们有

$$|\varphi_x(t)|=|f_t(x)|\leqslant\|f_t\|\|x\|\leqslant\|x\|_E,$$

从而

$$\max_{t\in P_0}|\varphi_x(t)|\leqslant\|x\|_E. \tag{2}$$

此外，对给定的 x 可以构造泛函 f_0 具有范数为一，且

$$f_0(x)=\|x\|_E.$$

因为 $f_0\in S$，所以存在 $t_0\in P_0$ 使

$$f_{t_0}=f_0.$$

由此
$$f_{t_0}(x)=\|x\|_E$$

即
$$\varphi_x(t_0)=\|x\|_E,$$

因此
$$\max_{t\in P_0}|\varphi_x(t)|\geqslant\|x\|_E \tag{3}$$

由(2)和(3)可得

$$\|\varphi_x\|_C = \max_{t\in P_0}|\varphi_x(t)| = \|x\|_E. \tag{4}$$

再由函数 $\varphi_x(t)$ 的构造可知若 $x_1 \in E$ 对应 $\varphi_{x_1}(t)$ 且 $x_2 \in E$ 对应 $\varphi_{x_2}(t)$，那么 x_1+x_2 对应 $\varphi_{x_1}(t)+\varphi_{x_2}(t)$，且 λx 对应 $\lambda\varphi_x(t)$. 因此我们得出一同构映象映射空间 E 于 $C[0,1]$ 的一个子集. 由同构性可知 x_1-x_2 对应 $\varphi_{x_1}(t)-\varphi_{x_2}(t)$，再由公式(4)可得

$$\|x_1-x_2\|_E = \|\varphi_{x_1}-\varphi_{x_2}\|_C,$$

这就是说，空间 E 到 $C[0,1]$ 的部分上的这个对应不仅是同构而且是等距.

定理完全证毕.

定理 2 (Frechét) 每一距离可分空间 X 等距于某一可分 B 型空间的一部分.

设 $M=\{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ 是空间 X 的可数稠密集. 对空间的每一元 $x \in X$ 使空间 m 的点 $y=\{\eta_i\}$ 与之对应，式中

$$\eta_i = \rho(x, x_i) - \rho(x_0, x_i) \quad i=1, 2, 3, \cdots$$

由三角公理

$$|\eta_i| = |\rho(x, x_i) - \rho(x_0, x_i)| \leqslant \rho(x, x_0),$$

所以 $\{\eta_i\}$ 为有界序列，即 y 确为空间 m 的点.

今设对 X 的元 x 和 x' 依我们的映象使 m 的元 $y=\{\eta_i\}$ 和 $y'=\{\eta_i'\}$ 与之对应. 我们有

$$\begin{aligned}\|y-y'\| &= \sup_i|\eta_i-\eta_i'|\\ &= \sup_i|[\rho(x, x_i)-\rho(x_0, x_i)]-[\rho(x', x_i)-\rho(x_0, x_i)]|\\ &= \sup_i|\rho(x, x_i)-\rho(x', x_i)| \leqslant \rho(x, x').\end{aligned} \tag{5}$$

今设 ε 为任意小于 $\rho(x, x')$ 的正数. 存在可数稠密集

M的点 x_n 使 $\rho(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. 从而

$$\rho(x', x_n) \geqslant \rho(x', x) - \rho(x, x_n)$$
$$> \rho(x', x) - \frac{\varepsilon}{2} > 0,$$

因此

$$|\eta_n - \eta_n'| = |\rho(x_n, x) - \rho(x_n, x')|$$
$$> \rho(x', x_n) - \frac{\varepsilon}{2}$$
$$> \rho(x, x') - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2}$$
$$= \rho(x, x') - \varepsilon.$$

由此
$$\|y - y'\| > \rho(x, x') - \varepsilon. \tag{6}$$

因为 $\varepsilon > 0$ 是任意的,所以由(6)有

$$\|y - y'\| \geqslant \rho(x, x'). \tag{7}$$

比较(5)和(7)可得

$$\|y - y'\| = \rho(x, x'). \tag{8}$$

这就是说X内点x和x'的距离等于m内对应点y和y'的距离，因而空间X等距于空间m的一个部分L. 显然空间m的这个部分是可分的.

令E代表空间m内由集L所产生的子空间. 那么E是某一可分B型空间. X等距于这个空间的一部分. 定理证完.

定理 3 (Banach-Mazur) 每一距离可分空间等距于空间$C[0, 1]$的一个部分.

证明由定理1和2立刻得出.

在结束本节之前,我们再提一下空间 $C[0, 1]$ 在另外意义下的万有性质. M. Г. Крейн 联系到矩量理论的某些问题和线性积分方程的理论在 Banach 空间内构造了锥体的理论.

空间E的锥是指闭凸集$K\subset E$具有下述性质：若$x\in K$，$(x\neq 0)$那么对$\lambda\geqslant 0$有$\lambda x\in K$且对$\lambda<0$有$\lambda x\bar{\in}K$，又若x，$y\in K$，那么$x+y\in K$. 锥称为正规的，如果对任两元x，$y\in K$具有$\|x\|=\|y\|=1$，那么

$$\|x+y\|\geqslant\delta,$$

式中δ为一固定正数. 例如空间$C[0,1]$内非负函数的全体就构成一个正规锥. 我们有下述定理成立.

定理 4 (М. Г. Крейн) [17] 设K为可分空间E内正规锥. 那么存在一对一线性映象映射空间E于$C[0,1]$的一个子空间，这时K的元且仅有K的元映于非负函数.

若E不可分，那么把$C[0,1]$换成空间$C(Q)$后有类似定理成立，其中$C(Q)$为某一紧拓扑空间Q上连续函数空间.

第六章 全连续算子

§1 全连续算子

定义 定义在线性赋范空间 E_x 内而值域在线性赋范空间 E_y 内的线性算子 A 称为全连续的，如果它把空间 E_x 内每一有界集映于空间 E_y 内紧集.

显然，每一全连续算子是有界的. 此外，由第五章 §1 定理 7 每一线性有界算子 A 把紧集映于紧集. 全连续性一般说来更强于简单连续性. 例如在无穷维空间 E 内单位算子不是全连续的，因为它映单位球于其自身，但它不紧.

例. 设 $E_x = E_y = C[0,1]$ 且

$$Ax = y(t) = \int_0^1 K(t,s)x(s)ds,$$

式中 $K(t,s)$ 为在正方形 $0 \leqslant t, s \leqslant 1$ 内的连续核. 我们来证明算子 A 全连续. 设 $\{x(t)\}$ 为 $C[0, 1]$ 内有界集，$\|x\| \leqslant r$. 显然，函数

$$y(t) = \int_0^1 K(t,s)x(s)ds$$

是一致有界的，如果 $x(t)$ 是给定的有界集中的函数的话. 事实上，若 $K = \max\limits_{t,s} |K(t, s)|$ 那么 $|y(t)| \leqslant Kr$. 此外函数 $y(t)$ 也是等度连续的. 事实上，任给 $\varepsilon > 0$，由于核 $K(t,s)$ 的一致连续性，存在这样 $\delta > 0$ 使得

$$|K(t_1,s) - K(t_2,s)| < \frac{\varepsilon}{r}$$

对 $|t_1-t_2|<\delta$ 和任意 $s\in[0,1]$ 成立．由此当 $|t_1-t_2|<\delta$ 时，

$$|y(t_1)-y(t_2)|\leqslant\int_0^1|K(t_1,s)-K(t_2,s)||x(s)|ds<\varepsilon$$

对此集的所有函数 $y(t)$ 成立，即 $y(t)$ 等度连续．

由 Arzelá 定理函数集 $\{y(t)\}$ 在空间 $C[0,1]$ 的距离意义下为紧集，故 A 为全连续算子．

引理 若序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0 且此序列为紧的，那么它强收敛于 x_0．

如果不然，存在 $\varepsilon_0>0$ 和一个无界增序列的下标 $n_1,n_2,\cdots,n_k,\cdots$ 使

$$\|x_{n_k}-x_0\|\geqslant\varepsilon_0.$$

因为序列 $\{x_{n_i}\}$ 紧，所以它含某一子序列 $\{x_{n_{ij}}\}$ 强收敛于某一元 u_0．从而更有 $x_{n_{ij}}\vec{\omega}u_0$．但同时又有 $x_{n_{ij}}\vec{\omega}x_0$，所以 $u_0=x_0$．

一方面我们有

$$\|x_{n_{ij}}-x_0\|\geqslant\varepsilon_0,$$

而在另一方面

$$\|x_{n_{ij}}-x_0\|\to0.$$

由此矛盾证明了引理．

定理 1 全连续算子 A 映弱收敛序列于强收敛序列．

设序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0，那么这个序列的元的范数有界．$\{x_n\}$ 作为有界序列，所以算子 A 映此序列为紧序列 $\{y_n\}$，其中 $y_n=Ax_n$．但在另一方面依第四章 §4 定理 6，

$$y_n=Ax_n\vec{\omega}\,Ax_0=y_0.$$

再依引理 $y_n\to y_0$，定理证完．

设 A 为映无穷维 Banach 空间 E 于其自身的全连续算子．再设 B 为任一线性有界算子作用于同一空间．于是 AB 和

BA 为全连续算子.

事实上，B 把有界集 $M \subset E$ 映于有界集 $B(M)$. 而此集由算子 A 映于紧集 $A(B(M))$. 从而算子 AB 映任一有界集为紧集，因此是全连续的.

同理可证算子 BA 全连续.

因为单位算子不是全连续的，由此可知全连续算子 A 不具有有界逆算子 A^{-1}.

最后，若算子 A, B 全连续，那么 $\alpha A + \beta B$ 也为全连续算子.

定理 2 如果映空间 E_x 于完备空间 E_y 的全连续算子序列 $\{A_n\}$ 一致收敛于算子 A，即是说 $\|A_n - A\| \to 0$，那么 A 也全连续.

我们要证明 A 把 E_x 的每一有界集映于空间 E_y 的紧集.

设 M 为空间 E_x 有界集且 r 为某一常数使得 $\|x\| \leqslant r$ 对任一 $x \in M$. 对给定 $\varepsilon > 0$ 存在 n_0 使得

$$\|A_{n_0} - A\| < \frac{\varepsilon}{r}.$$

令 $A(M) = K$ 且令 $A_{n_0}(M) = N$. 可证 N 是对 K 的 ε-网. 事实上，任取 $y \in K$. 对此 y 取其任一原象 $x \in M$ 且令 $y_0 = A_{n_0}x \in N$. 我们有

$$\|y - y_0\| = \|Ax - A_{n_0}x\| \leqslant \|A - A_{n_0}\|\|x\| < \frac{\varepsilon}{r} r$$

$$= \varepsilon.$$

在另一方面，由 A_{n_0} 的全连续性及集 M 的有界性知 N 为紧集. 这样对任意 $\varepsilon > 0$ 知 K 有紧 ε-网，从而是紧的. 这就证明了算子 A 映任一有界集于紧集，从而全连续. 定理证毕.

例. 设 $E_x = E_y = L_2[0,1]$. 可证算子

$$Ax = y(t) = \int_0^1 K(t,s)x(s)ds$$

对核 $K(t, s)$ 满足

$$\int_0^1\int_0^1 K^2(t,s)\,dt\,ds < +\infty$$

时是全连续的.

先设 $K(t,s)$ 为连续核. 设M为 $L_2[0,1]$ 内有界集且

$$\int_0^1 x^2(t)\,dt \leqslant r^2$$

对所有 $x(t)\in M$. 考虑函数集

$$y(t)=\int_0^1 K(t,s)x(s)\,ds \quad x(t)\in M.$$

我们可证函数 $y(t)$ 一致有界且等度连续. 由此就可得出集$\{y(t)\}$ 在一致收敛意义下的紧性，从而依平方平均收敛的紧性.

我们有

$$\begin{aligned}|y(t)| &= \left|\int_0^1 K(t,s)x(s)\,ds\right| \\ &\leqslant \left(\int_0^1 K^2(t,s)\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 x^2(s)\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant Kr,\end{aligned}$$

式中 $K=\max\limits_{t,s}|K(t, s)|$. 由此得出集 $\{y(t)\}$ 的一致有界性. 此外

$$\begin{aligned}|y(t_1)-y(t_2)| &\leqslant \left(\int_0^1 [K(t_1,s)-K(t_2,s)]^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad\times\left(\int_0^1 x^2(s)\,ds\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon\end{aligned}$$

对 $|t_1-t_2|<\delta$, 式中 δ 是这样选择的使得对 $|t_1-t_2|<\delta$ 时

$$|K(t_1,s)-K(t_2,s)| < \frac{\varepsilon}{r}.$$

估值式 $|y(t_1)-y(t_2)|<\varepsilon$ 不依赖 t_1, t_2 在$[0,1]$内位置以及函数 $y(t)\in M$ 的选择，所以函数 $y(t)$ 等度连续.

因此，在连续核的情形下算子 A 全连续。

设 $K(t,s)$ 为任一在正方形 $0\leqslant t,\ s\leqslant 1$ 上平方可积分的函数。取连续核序列 $\{K_n(t,s)\}$ 依平均收敛于$K(t,s)$，即

$$\int_0^1\int_0^1 \{K(t,s)-K_n(t,s)\}^2 dt\,ds \to 0 \quad 对\ n\to\infty.$$

令
$$A_n x=\int_0^1 K_n(t,s)x(s)ds.$$
我们有

$$\begin{aligned}\|Ax-A_nx\| &= \left\{\int_0^1\left[\int_0^1 K(t,s)x(s)ds\right.\right.\\ &\qquad \left.\left.-\int_0^1 K_n(t,s)x(s)ds\right]^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}}\\ &=\left\{\int_0^1\left[\int_0^1 (K(t,s)-K_n(t,s))\right.\right.\\ &\qquad \left.\left.\times x(s)ds\right]^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}}\\ &\leqslant\left\{\int_0^1\left[\int_0^1 (K(t,s)-K_n(t,s))^2 ds\right.\right.\\ &\qquad \left.\left.\times\int_0^1 x^2(s)ds\right]dt\right\}^{\frac{1}{2}}\\ &=\left\{\int_0^1\int_0^1 (K(t,s)-K_n(t,s))^2 dt\,ds\right\}^{\frac{1}{2}}\|x\|.\end{aligned}$$

从而

$$\|A-A_n\|\leqslant\left\{\int_0^1\int_0^1 (K(t,s)-K_n(t,s))^2 dt\,ds\right\}^{\frac{1}{2}},$$

由此可知当 $n\to\infty$时 $\|A-A_n\|\to 0$。因为所有 A_n 全连续，依上面证明的定理A 也全连续.

注．按点收敛全连续算子序列 $\{A_n\}$ 的极限可能不是全连续的。事实上在具有基 $\{e_i\}$ 的无穷维 Banach 空间中考虑由等式

$$S_n x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i \quad 对 x=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i e_i$$

给定的算子 S_n. 算子 S_n 映 E 于有穷维空间 E_n，所以全连续. 对 $n\to\infty$ 算子序列 $\{S_n\}$ 按点收敛于单位算子，而它不是全连续的.

定理 3 全连续 A 的值域可分.

事实上，设集 K_n 是球 $\|x\|\leqslant n$ 的像. 因为 A 全连续，所以 K_n 为紧集，从而为可分集（见第五章 §1 推论 2）. 令 T_n 为在 K_n 稠密的可数集. 由于算子 A 的值域是 $K=\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n$，所以 $T=\bigcup_{n=1}^{\infty}T_n$ 是可数集在 K 内稠密. 这就证明了所要定理.

定理 4 若 A 是映 E_x 于 E_y 内的全连续算子，那么映 E_y^* 于 E_x^* 内的 A 的共轭算子 A^* 也全连续.

只须证明空间 E_y^* 内的单位球 S_y^* 的像 $A^*(S_y^*)$ 为紧集.

考虑空间 E_x 内闭单位球的像 $A(\bar{S}_x)$. 因为 A 是全连续的，所以 $A(\bar{S}_x)$ 为紧集. 我们在这个集上来讨论属于 S_y^* 的线性泛函. 若 $f\in S_y^*$，$y\in A(\bar{S}_x)$，那么

$$|f(y)|\leqslant\|f\|\|y\|=\|f\|\|Ax\|\leqslant\|f\|\|A\|\|x\|\leqslant\|A\|,$$

这是因为 $\|f\|\leqslant 1$ 且 $\|x\|\leqslant 1$. 从而 S_y^* 内泛函在集 $A(\bar{S}_x)$ 上一致有界. 此外，对 y_1，$y_2\in A(\bar{S}_x)$，$f\in S_y^*$

$$|f(y_1)-f(y_2)|=|f(y_1-y_2)|\leqslant\|f\|\|y_1-y_2\|\leqslant\|y_1-y_2\|.$$

由此可知 S_y^* 内泛函在 $A(\bar{S}_x)$ 等度连续. 所以由推广 Arzelá 定理 1 第五章 § 2 定理 2)可知集 S_y^* 在 $A(\bar{S}_x)$ 上一致收敛意义下为紧集.

现在考虑任一序列 $\{A^*f_n\}\subset A^*(S_y^*)$. 因为集 S_y^* 紧，所以由序列 $\{f_n\}$ 可选子序列 $\{f_{ni}\}$ 在集 $A(\bar{S}_x)$ 上一致收敛.

$$\sup_{x\in \bar{S}_x} |f_{n_i}(Ax) - f_{n_j}(Ax)| \to 0$$

对 n_i，$n_j \to \infty$。但

$$\sup_{x\in \bar{S}_x} |f_{n_i}(Ax) - f_{n_j}(Ax)| = \sup_{x\in \bar{S}_x} |A^*(f_{n_i} - f_{n_j})x|$$
$$= \|A^*f_{n_i} - A^*f_{n_j}\|.$$

因此序列 $\{A^*f_{n_i}\}$ 依空间 E_x^* 内范数收敛，这就证明了 $A^*(S_y^*)$ 的紧性.

用有限维算子逼近具有基的 Banach 空间内的全连续算子 考虑映射具有基的 Banach 空间 E 于其自身内的全连续算子 A. 令 A 代表这个空间的单位球 S. 且令 K 代表形式如 $y=Ax$，$x\in S$ 的元的全体.

因为 A 全连续，所以 K 为紧集. 于是依第五章 § 2 定理 3 可知对任意 $\varepsilon>0$ 可定下标 $n=n(\varepsilon)$ 使得 $\|R_ny\|<\varepsilon$ 对所有 $y\in K$.

固定这个 n 可得

$$Ax = y = S_ny + R_ny = S_n(Ax) + R_n(Ax)$$
$$= A_1x + A_2x.$$

式中 A_1 和 A_2 显然为线性算子. 这时令

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i e_i,$$

我们有

$$A_1x = S_ny = \sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i,$$

由此可见算子 A_1 为有限维的，即是说对任一x，元 A_1x 属于由基的元 e_1，e_2，$\cdots$，e_n 定义的有限维子空间.

此外

$$\sup_{x\in S} \|A_2x\| = \sup_{y\in K} \|R_ny\| < \varepsilon,$$

由此可得

$$\|A_2\| < \varepsilon.$$

因此我们把全连续算子A分解为两个算子的和，其中之一为有限维的，而另一个的范数不超过指定的任意小的数．所以我们有时也说，在具有基的空间内的全连续算子几乎是有限维的．

§2 具有全连续算子的线性方程

我们将在本节讨论具有全连续算子的线性方程． F. Riesz 曾经指出，对这样的算子方程，Fredholm 线性积分方程的主要结果均适用．

两个引理 设A为映 Banach 空间E于其自身的全连续算子．我们来考虑算子方程

$$Ax - x = y \tag{1}$$

或

$$Tx = y, \tag{1'}$$

式中 $T = A - I$．随同方程(1)我们也考虑算子方程

$$A^*f - f = g \tag{2}$$

或

$$T^*f = g, \tag{2'}$$

式中A^*为A的共轭算子作用于空间E^*．我们证明过A^*也是全连续算子．

引理 1 设N为算子T的零空间，即使得 $Tx = 0$ 的所有x的集，那么N是空间E内有限维子空间．

设M为N的任一有界子集．对任一$x \in N$我们有 $Ax=x$，即是说算子A使子空间N的元不变，特别是，它映某M于其自身．在另一方面，作为全连续算子的A也映M于紧集．从而每一有界集$M \subset N$为紧集，由此依第五章 §2 定理 4 可知子空间N为有限维的．

注. 子空间N的元是算子A对应于本征值$\lambda_0=1$的本征元. 如果把1换成另一个异于零的本征值的话定理的叙述及其证明仍然有效. 由此我们证明了. 对应于同一本征值, 全连续算子仅有有限个线性无关的本征元.

引理2 设 $L=T(E)$, 即是说L是可表为 $y=Ax-x$ 的 $y\in E$ 的全体. 那么L为子空间.

L为线性流形是显然的. 为此只须证L为闭集.

首先证明, 存在仅依赖于A的常数α, 使得每当方程

$$Tx=y \tag{1'}$$

可解时, 那么至少它的解之一满足不等式

$$\|x\|\leqslant\alpha\|y\|. \tag{3}$$

设x_0为方程(1')的一个解. 那么这个方程的任一个另外的解将是

$$x=x_0+z$$

的形式, 其中z为齐次方程

$$Tx=0 \tag{1*}$$

的解.

我们考虑泛函

$$\varphi(z)=\|x_0+z\|$$

这是一个下有界连续泛函. 令

$$\alpha=\inf\varphi(z),$$

且令 $\{z_n\}\subset N$ 为一极小化序列, 即

$$\varphi(z_n)=\|x_0+z_n\|\to\alpha. \tag{4}$$

序列 $\{\|x_0+z_n\|\}$ 因其有极限所以有界. 但这时序列$\{\|z_n\|\}$也有界, 因为

$$\|z_n\|=\|(z_n+x_0)-x_0\|\leqslant\|z_n+x_0\|+\|x_0\|.$$

这样, $\{z_n\}$是有限维空间内有界序列, 从而可由它选取收敛子序列. 为了简写记号不妨设 $z_n\to z_0$. 于是

$$\varphi(z_n) \to \varphi(z_0) \tag{5}$$

由 (4) 和 (5) 可得

$$\varphi(z_0) = \|x_0 + z_0\| = \alpha.$$

从而在方程 (1′) 可解的情形下，它常有解

$$\tilde{x} = x_0 + z_0$$

具有极小范数.

现在证明对这个元有不等式 (3) 成立. 我们考虑商

$$\frac{\|\tilde{x}\|}{\|y\|}$$

并设这个商无界. 那么存在序列 y_n 和 $\tilde{x}_n$ 使

$$\frac{\|\tilde{x}_n\|}{\|y_n\|} \to \infty.$$

因为 λy_n 显然对应极小解 $\lambda\tilde{x}_n$，所以不失一般性可设 $\|\tilde{x}_n\| = 1$. 于是 $\|y_n\| \to 0$. 因为序列 $\{\tilde{x}_n\}$ 有界，而且算子 A 全连续，所以序列 $\{A\tilde{x}_n\}$ 紧，从而含收敛子序列. 我们仍可设

$$A\tilde{x}_n \to \tilde{x}_0. \tag{6}$$

但是因为

$$\tilde{x}_n = A\tilde{x}_n - y_n,$$

我们有

$$\tilde{x}_n \to \tilde{x}_0,$$

从而

$$A\tilde{x}_n \to A\tilde{x}_0. \tag{7}$$

由 (6) 和 (7) 可得

$$A\tilde{x}_0 = \tilde{x}_0,$$

即 $\tilde{x}_0 \in N$. 但由解 $\tilde{x}_n$ 的范数的极小性，我们有

$$\|\tilde{x}_n - \tilde{x}_0\| \geqslant \|\tilde{x}_n\| = 1,$$

而与 $\{\tilde{x}_n\}$ 收敛于 $\tilde{x}_0$ 矛盾.

因此 $\dfrac{\|\tilde{x}\|}{\|y\|}$ 有界，若令

$$\alpha = \sup \frac{\|\tilde{x}\|}{\|y\|},$$

那么就得出所要的不等式.

今设给定序列 $\{y_n\} \subset L$ 收敛于 y_0. 如果必要可以考虑子序列,因而可设

$$\|y_n - y_0\| < \frac{1}{2^{n+1}},$$

由此
$$\|y_{n+1} - y_n\| < \frac{1}{2^n}.$$

令 x_0 代表方程 $Tx = y_1$ 的极小解,且令 x_n, $n = 1, 2, \cdots$ 代表方程

$$Tx = y_{n+1} - y_n$$

的极小解. 于是

$$\|x_n\| \leqslant \alpha \|y_{n+1} - y_n\| < \frac{\alpha}{2^n}.$$

由此不等式可知级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ 收敛,且若 $\tilde{x}$ 为此级数的和时,那么

$$T\tilde{x} = T\left(\lim_n \sum_{k=0}^{n} x_k\right) = \lim_n \sum_{k=0}^{n} Tx_k$$

$$= \lim_n \left[y_1 + \sum_{k=1}^{n} (y_{k+1} - y_k) \right]$$

$$= \lim_n y_{n+1} = y_0,$$

这就证明了 $y_0 \in L$ 引理完全证明.

定理 1 为使对给定的 $y \in E$ 方程(1′)有解,必须且只须 $f(y) = 0$ 对满足

$$A^*f - f = 0$$

的任一线性泛函 f 成立.

必要性. 设方程

$$Ax - x = y$$

可解，即对某一 $x_0 \in E$ y 可表为 $y = Ax_0 - x_0$ 的形式. 任取线性泛函 f 使

$$A^*f - f = 0,$$

那么

$$\begin{aligned} f(y) &= f(Ax_0 - x_0) = f(Ax_0) - f(x_0) \\ &= A^*f(x_0) - f(x_0) = (A^*f - f)x_0 = 0. \end{aligned}$$

所以定理的条件是必要的.

充分性. 我们证明若定理的条件被满足，那么蕴含关系 $y \in L = T(E)$ 成立，假如不然，即设 $y \bar{\in} L$. 因为 L 闭，那么 y 与 L 的距离 $d > 0$. 从而依 Hahn-Banach 定理的推论，存在线性泛函 f_0 使 $f_0(y) = 1$ 和 $f_0(z) = 0$ 对所有 $z \in L$. 最后这个等式是说

$$f_0(Ax - x) = (A^*f_0 - f_0)x = 0$$

对所有 $x \in E$，即是说

$$A^*f_0 - f_0 = 0.$$

这样就导致矛盾，因为在一方面依构造 $f_0(y) = 1$，而在另一方面依条件 $f_0(y) = 0$. 这就是说，$y \in L$. 所以定理的充分性得证.

注. 如果方程 $Tx = y$ 具有这样的性质，即它有解，如果 $f(y) = 0$ 对满足等式 $T^*f = 0$ 的任意 f 成立. 我们就称此方程为正规可解的. 在前述定理中实际上证明了，为了方程 $Tx = y$ 的正规可解性，只须 $L = T(E)$ 为闭集. 可以证明这个条件也是必要的 (见 [34]).

推论 设共轭齐次方程

$$A^*f - f = 0$$

仅有零解 $f = 0$，那么方程

$$Ax - x = y$$

对任意右端可解.

定理 2 为使方程(2)对给定的 $g \in E^*$ 有解，必须且只须 $g(x) = 0$ 对满足

$$Ax - x = 0$$

的任意元 $x \in E$ 成立.

必要性由等式

$$g(x) = (A^*f - f)x = f(Ax - x) = 0$$

是显然的，

我们来证明充分性.

在子空间 L 我们借以下等式来定义泛函 $f_0(y)$

$$f_0(y) = g(x)$$

式中 x 是元 y 在映象 T 之下的原象之一（即是说 $Ax - x = y$）. 若定理的条件满足，泛函 f_0 是唯一确定的. 因为若 u 是同一元 y 的另一原象，

$$Ax - x = Au - u,$$

于是

$$A(x - u) - (x - u) = 0,$$

从而

$$g(x - u) = 0,$$

即

$$g(x) = g(u).$$

泛函 f_0 的加性及齐性容易验证. 至于它的有界性可证明如下. 因为在引理 2 的证明过程中，我们说过，至少有元 y 的原象之一 x 满足不等式

$$\|x\| \leqslant \alpha\|y\|.$$

但这时

$$|f_0(y)| = |g(x)| \leqslant \|g\|\|x\| \leqslant \|g\|\alpha\|y\|,$$

所以 f_0 的有界性得证. 依 Hahn-Banach 定理扩张 f_0 于全空

间我们得出线性泛函 f 使

$$f(Ax-x)=f(y)=f_0(y)=g(x),$$

或

$$(A^*f-f)x=g(x)$$

为方程(2)的解.

推论 若方程 $Ax-x=0$ 仅有零解 $x=0$，那么方程 $A^*f-f=g$ 对任意右端 g 可解.

直到现在我们研究已知方程和它的共轭方程之间的联系. 现在我们指出在同一空间中齐次和非齐次方程的可解性之间也存在密切的联系.

定理 3 设 A 为映 Banach 空间 E 于其自身的全连续算子. 为使方程

$$Ax-x=y \tag{1}$$

对任意 y 可解，必须且只须对应齐次方程

$$Ax-x=0 \tag{1*}$$

仅有平凡解 $x=0$. 在此情形下方程(1)的解唯一确定，而且算子

$$T=A-I$$

有有界逆.

必要性. 用 N_k 代表算子 T^k 的零子空间. 显然由 $T^kx=0$ 可得 $T^{k+1}x=0$. 即 $N_k\subset N_{k+1}$.

设方程

$$Ax-x=y$$

对任意 y 可解,并设齐次方程

$$Ax-x=0$$

有非零解 x_1. 设 x_2 为方程 $Ax-x=x_1$ 的解，一般 x_{k+1} 为方程

$$Ax-x=x_k,\quad k=1,2,3,\cdots$$

的解,我们有

$$Tx_k = x_{k-1},\ T^2x_k = x_{k-2}, \cdots,\ T^{k-1}x_k = x \neq 0.$$

但同时

$$T^k x_k = Tx_1 = 0.$$

因此 $x_k \in N_k$ 且 $x_k \bar{\in} N_{k-1}$，即每一子空间 N_{k-1} 为下一子空间 N_k 的真部分. 依第二章 §2 引理知在子空间 N_k 内存在元 y_k 具有范数等于一而且

$$\|y_k - x\| \geqslant \frac{1}{2}.$$

对任意 $x \in N_{k-1}$. 我们考虑 $\{Ay_k\}$. 这个序列紧，因为 $\|y_k\| = 1$ 且 A 为全连续算子. 在另一方面，设 y_p 和 y_q 为两个这样的元且 $p > q$. 因为

$$T^{p-1}(y_q + Ty_p - Ty_q) = T^{p-1}y_q + T^p y_p - T^p y_q = 0,$$

所以

$$y_q + Ty_p - Ty_q \in N_{p-1}.$$

因此

$$\|Ay_p - Ay_q\| = \|y_p - (y_q + Ty_p - Ty_q)\| \geqslant \frac{1}{2}.$$

这个矛盾的产生是由于假设了方程 (1) 的可解性的同时也设 (1*) 有非零解. 必要性证完.

充分性. 设方程 (1*) 仅有不足道解，那么由定理 2 的推论可知方程

$$A^* f - f = g \tag{2}$$

对任意右端可解. 因为 A^* 也是全连续算子且 E^* 为 Banach 空间，所以对方程(2)应用刚才证明过的本定理的必要部分知方程

$$A^* f - f = 0 \tag{2*}$$

仅有零解. 但这时依定理 1 的推论方程 (1) 对任意 y 可解. 定理的充分性得证.

因为当定理的条件被满足时，方程 (1) 是唯一可解的，所

以存在算子 $A-I$ 的逆算子

$$T^{-1}=(A-I)^{-1}.$$

由于解的唯一性，所以它同时也是极小的，因此

$$\|(A-I)^{-1}y\|\leqslant\alpha\|y\|.$$

定理全部证毕。

定理 4 具有映 Banach 空间 E 于其自身的全连续算子 A（A^* 也全连续映 E^* 于其自身）的方程

$$Ax-x=0 \tag{1*}$$

和

$$A^*f-f=0 \tag{2*}$$

有同一个数的线性无关解。

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为方程 (1*) 的解所成的子空间 N 的基，而 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 则为方程(2*)的解子空间的基。

构造泛函系 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$ 双正交于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，即

$$\varphi_i(x_j)=\delta_{ij},\ i,j=1,2,\cdots n.$$

并构造元系 $z_1,z_2,\cdots,z_m$ 双正交于 $f_1,f_2,\cdots,f_m$。设 $n<m$。我们考虑算子

$$Ux=Ax+\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x)z_i.$$

作为全连续算子和有限维算子的和可知这个算子是全连续的。我们来证明方程

$$Ux-x=0$$

仅有零解。设 x_0 是这个方程的解。于是

$$f_k(Ux_0-x_0)=0\quad k=1,2,\cdots,m.$$

或

$$f_k(Ax_0-x_0+\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x_0)z_i)=0,$$

由此

$$(A^*f_k-f_k)x_0+\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x_0)f_k(z_i)=0,$$

从而再考虑到 $\{f_i\}$ 和 $\{z_i\}$ 的双正交性知

$$\varphi_k(x_0) = 0, \ k = 1,2,\cdots,n \ (n < m).$$

因此 $Ux_0 = Ax_0$. 且随之 x_0 满足方程

$$Ax_0 - x_0 = 0.$$

因为 $x_0 \in N$ 且 $\{x_i\}$ 为N的基，所以

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i.$$

但 $\xi_i = \varphi_i(x_0) = 0$. 因此 $x_0 = 0$, 这就是所需要证明的.

因为方程

$$Ux - x = 0$$

仅有零解，所以方程

$$Ux - x = y$$

对任意右端有解，特别对 $y = z_{n+1}$.

设 x' 是这个方程的解，那么一方面有如上述

$$\begin{aligned} f_{n+1}(z_{n+1}) &= f_{n+1}\left(Ax' - x' + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x') z_i \right) \\ &= (A^* f_{n+1} - f_{n+1})x' + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x') f_{n+1}(z_i) \\ &= 0, \end{aligned}$$

而在另一方面依构造 $f_{n+1}(z_{n+1}) = 1$. 这个矛盾指出不可能有 $n < m$.

现在设 $m < n$. 我们在空间 E^* 来考虑算子

$$U^* f = A^* f + \sum_{i=1}^{m} f(z_i) \varphi_i.$$

容易验证（注意 $m < n$）这个算子与U共轭，而在其表达式内 n 换成 m.

我们证明对算子 U^* 方程

$$U^*f - f = 0$$

仅有平凡的解。对所有 $k = 1,2,\cdots n$，我们有

$$(U^*f - f)x_k = (A^*f - f)x_k + \sum_{i=1}^{m} + (z_i)\varphi_i(x_k)$$

$$= f(Ax_k - x_k) + f(z_k) = f(z_k). \tag{8}$$

因此若 f_0 是方程 $U^*f - f = 0$ 的解，那么由(8)可得 $f_0(z_k) = 0, k = 1,2,\cdots m$。从而 $U^*f_0 = A^*f_0$ 且 f_0 是方程 $A^*f - f = 0$ 的解。但这时

$$f_0 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i = \sum_{i=1}^{m} f_0(z_i) f_i = 0.$$

因为 U^* 是全连续算子，所以依定理3方程

$$U^*f - f = g$$

对任意 g 可解，特别对 $g = \varphi_{m+1}$。于是在一方面若 f' 是这样方程的解，那么

$$\varphi_{m+1}(x_{m+1}) = (U^*f' - f')x_{m+1} = (A^*f' - f')x_{m+1}$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} f'(z_i)\varphi_i(x_{m+1})$$

$$= f'(Ax_{m+1} - x_{m+1}) = 0,$$

而在另一方面 $\varphi_{m+1}(x_{m+1}) = 1$。

这个矛盾指出不可能有 $m < n$，因此 $m = n$，定理证毕。

结合定理1—4我们可以叙述如下命题作为线性积分方程理论所熟知的 Fredholm 定理对任一具有全连续算子的方程的推广。

给定方程

$$Ax - x = y \tag{1}$$

和

$$A^*f - f = g, \tag{2}$$

式中 A 是作用于 Banach 空间 E 的全连续线性算子，而 A^* 是它的共轭算子定义于共轭空间 E^*. 那么或者(1) 和 (2)对任意右端可解，而且在这个情形下齐次方程

$$Ax - x = 0 \tag{1*}$$

$$A^*f - f = 0 \tag{2*}$$

仅有零解，或者齐次方程有同一有限数的线性无关解

$$x_1, x_2, \cdots, x_n; f_1, f_2, \cdots, f_n,$$

而且在这个情形下，为了方程(1)(相应地(2))有解，必须且只须

$$f_i(y) = 0, \ i = 1, 2, \cdots n$$

(相应地 $g(x_i) = 0, \ i = 1, 2, \cdots n$)

方程 (1) 的一般解于是有如下形式

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i,$$

式中 x_0 是方程 (1) 的某一解，而 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为任意常数. 相应地，方程(2)的一般解是如下的形式

$$f = f_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i,$$

式中 f_0 是(2)的某一个解，而 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为任意常数.

对方程 (1) 的更深入研究导致下述结果. 用 L_k 代表算子

$$T^k = (A - I)^k = A^k - c_k' A^{k-1} + \cdots + (-1)^k I$$
$$= \pm(A_k - I).$$

的值域，式中 A_k 仍为全连续算子.

由引理 2 每一 L_k 是一子空间. 如果 $y \in L_k$，那么

$$y = T^k x = T^{k-1}(Tx) = T^{k-1} z,$$

即 $y \in L_{k-1}$，从而子空间 L_k 构成减序列.

我们用 N_k 代表算子 T^k 的零子空间.

定理 5 在子空间L_k之间仅有有限个不相同，同理，在子空间N_k中仅有有限个不相同.

首先证明，若 $L_m = L_{m+1}$，那么 $L_m = L_k$ 对所有 $k>m$. 取任意元 $y\in L_{m+1}$. 我们有

$$y = T^{m+1}x = T(T^m x).$$

但因 $L_m = L_{m+1}$，所以存在元 x' 使

$$T^m x = T^{m+1}x'.$$

因此 $$y = T(T^m x) = T(T^{m+1}x') = T^{m+2}x',$$

即 $y\in L_{m+2}$. 由此

$$L_{m+2} = L_{m+1},$$

同理 $$L_{m+3} = L_{m+2},\cdots$$

令设定理的结论不成立，从而对每一 n 有 $L_n \neq L_{n+1}$. 因为 $L_{n+1}\subset L_n$，所以依第二章 § 2 引理，存在元 x_n 具有范数等于一，且

$$\|x_n - y\| \geqslant \frac{1}{2}$$

对所有 $$y\in L_{n+1}.$$

考虑序列 $\{x_n\}$. 这个序列属于空间E的单位球，因此序列 $\{Ax_n\}$ 必须紧. 但在另一方面我们有

$$\begin{aligned}Ax_n - Ax_{n+p} &= x_n - Tx_n - x_{n+p} + Tx_{n+p}\\ &= x_n - (Tx_n + x_{n+p} - Tx_{n+p}).\end{aligned}$$

元 $$y = Tx_n + x_{n+p} - Tx_{n+p}\in L_{n+1},$$

因为

$$Tx_n = T(T^n x) = T^{n+1}x\in L_{n+1},\quad x_{n+p}\in L_{n+p}\subset L_{n+1},$$

且 $$Tx_{n+p}\in L_{n+p+1}\subset L_{n+1}.$$

但这时由序列 $\{x_n\}$ 的构造我们有

$$\|Ax_n - Ax_{n+p}\| = \|x_n - y\| \geqslant \frac{1}{2},$$

从而序列$\{Ax_n\}$不紧. 这个矛盾证明了定理的第一部分. 同理可证定理第二部分（事实上，在证明定理3时已经这样做了）

定理6 对任意全连续算子A，存在空间E的直和分解

$$E = U \oplus V, \tag{9}$$

而且

1）子空间V为有限维的；

2）算子$A-I$一对一地映子空间U于U上，映子空间V于V内；

3）算子A可表为两个算子A_u和A_v的和：

$$A = A_u + A_v \tag{10}$$

式中A_u和A_v为全连续算子依次映E于U和映E于V. 算子$A_u - I$可逆且

$$A_uA_v = A_vA_u = 0.$$

设ν为最小自然数n使$L_n = L_{n+1}$. 令$U = L_\nu$, $V = N_\nu$. 以前已经证明过U和V均为子空间. 因为$T^\nu = \pm(A_\nu - 1)$，式中A_ν为全连续算子. 所以由引理1，V是算子$A_\nu - I$的零子空间N_ν，所以是有限维的

令$x \in U$且令$y = Tx$. 因为$x \in L_\nu$，所以存在元$x' \in E$使$x = T^\nu x'$. 于是

$$y = Tx = T^{\nu+1}x' \in L_{\nu+1} = L_\nu = U.$$

换句话说，子空间U的元的象属于同一子空间.

今设y为U的任一元：

$$y \in U = L_\nu = L_{\nu+1}.$$

存在元$x' \in E$使

$$y = T^{\nu+1}x' = T(T^\nu x') = Tx,$$

式中

$$x = T^\nu x' \in L_\nu = U.$$

从而每一元$y \in U$是某一元$x \in U$的象，故算子T映U于U

上.

由此据定理 3 得出映象 $Tx=y$，$x\in U$ 的一对一性，而且仅在子空间 U 的元上来考虑算子 T 时它有有界逆.

今设 $x\in V=N_\nu$. 这就是说 $T^\nu x=0$，或 $T^{\nu-1}(Tx)=0$. 但 $Tx\in N_{\nu-1}\subset N_\nu$，从而算子 T 映 V 于其自身.

现在不难证明等式(9). 令 T_u 代表仅看做作用在 U 时的算子 T. 上面说过，这个算子有逆. 对任意 $x\in E$ 令 $u=T_u^{-\nu}T^\nu x$ 且令 $v=x-u$. 显然 $u\in U$. 此外，因为

$$T^\nu v=T^\nu x-T^\nu u=0,$$

所以 $v\in V$.

今若

$$x=\tilde{u}+\tilde{v}$$

为元 $x\in E$ 的另一表现，式中 $\tilde{u}\in U$ 且 $\tilde{v}\in V$，那么我们有

$$T^\nu x=T^\nu\tilde{u}+T^\nu\tilde{v}=T^\nu\tilde{u}, \tag{11}$$

这是因为 $T^\nu\tilde{v}=0$. 因为 $\tilde{u}\in U$，所以由等式(11)可得

$$\tilde{u}=T_u^{-\nu}T^\nu\tilde{u}=T_u^{-\nu}T^\nu x,$$

这就证明了表现的唯一性.

注意一下，因为 T 和 T_u^{-1} 都是线性算子，所以

$$\|u\|=\|T_u^{-\nu}T^\nu x\|\leqslant c_1\|x\|,$$

从而也有

$$\|v\|\leqslant c_2\|x\|.$$

现在我们引入算子 A_u 和 A_v，而对任一 $x\in E$ 令

$$A_u x=A_u,\quad A_v x=Av.$$

特别，$A_u v=A_v u=0$. 因为

$$A_u x=T_u+u \quad 且 \quad A_v x=Tv+v$$

那么由上面证明的关系 $T(U)=U$ 和 $T(V)\subset V$ 可得 $Au\in U$ 和 $Av\in V$. 因此算子 A_u 和 A_v 依次映 E 于 U 和 V. 显然

a) Au 和 Av 为线性有界算子，

b) $A=A_u+A_v$，

c) $A_u(A_v x) = A_v(A_u x) = 0$.

d) A_v 为全连续算子，因为它映空间 E 于有限维子空间 V，这时 A_u 也是全连续算子.

最后，我们考虑方程

$$A_u x - x = y = u + v \tag{12}$$

令 x_0' 为方程

$$Ax - x = u$$

的解. 它由于 $T = A - I$ 在 U 上有逆，所以是存在的. 考虑元 $x_0 = x_0' - v$，我们有

$$\begin{aligned} A_u x_0 - x_0 &= A_u(x_0' - v) - x_0' + v \\ &= A_u x_0' - x_0' + v = u + v = y, \end{aligned}$$

从而方程(12)常可解. 但这时依定理3，算子 $A_u - I$ 有有界逆，定理全部证毕.

在结束本节之前，我们再考虑一下含有参数的方程. 因为方程

$$Ax - \lambda x = y, \ \lambda \neq 0 \tag{1_λ}$$

可以写成

$$\frac{1}{\lambda} Ax - x = \frac{1}{\lambda} y,$$

且 $\frac{1}{\lambda} A$ 随着 A 而为全连续的. 所以对方程(1)证明的定理对方程 (1_λ) 仍然有效.

由定理 3 可得，对给定的 $\lambda \neq 0$，或者方程

$$Ax - \lambda x = y$$

对任意右端可解，或者齐次方程

$$Ax - \lambda x = 0$$

有非零解. 因此每一参数值 $\lambda \neq 0$ 或为正则值或为本征值.

故谱的另外非零点除去本征值外没有其它的点[1].

定理 7 若A为全连续算子，那么它的谱或含有限个点或含可数无限个点[*]. 所有本征值含于区间$[-\|A\|, \|A\|]$，而且在可数无穷的情形下只有唯一聚点 $\lambda=0$.

考虑算子

$$T_\lambda = A - \lambda I.$$

把它写成

$$T_\lambda = -\lambda\left(I - \frac{1}{\lambda} A\right)$$

的形式,那么由第三章§5的结果可知，当

$$\frac{1}{|\lambda|}\|A\| < 1$$

时,算子

$$I - \frac{1}{\lambda} A,$$

从而算子 T_λ 有逆. 即是说,算子A的谱含于闭区间$[-\|A\|, \|A\|]$. 设 $0<\alpha<\|A\|$. 为了完成定理的证明,只须证明,可能仅存在有限个本征值 λ 使 $|\lambda| \geqslant \alpha$.

如果不然,我们可以选一个序列的不同本征值

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n, \cdots,$$

而且 $|\lambda_i| \geqslant \alpha$. 设 $x_1, x_2, \cdots x_n, \cdots$ 是对应于这些本征值的本征元序列,即

$$Ax_n = \lambda_n x_n.$$

我们证明,元 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 对任意 k 线性无关. 对 $k=1$ 这是明显的. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 线性无关.

---

1) 算子 $A-\lambda I$ 的零子空间的维数称为本征值 λ 的重复度,由引理1可知全连续算子的所有非零本征值具有有限重复度.

*) 全连续算子(即使定义在 Hilbert 空间内)可能没有本征值——译者注.

如果设

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} c_i t_i, \tag{13}$$

那么以算子 A 作用于这个等式的两边可得

$$\lambda_{k+1} x_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c_i x_i \tag{14}$$

由(13)和(14)可得(因 $\lambda_{k+1} \neq 0$)

$$\sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}}\right) c_i x_i = 0.$$

但由不等式

$$1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}} \neq 0$$

以及 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 的线性无关性，这是不可能的。

设 L_k 为由元 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 所产生的子空间. L_k 是空间 L_{k+1} 的真子空间. 因而存在元 $y_{k+1} \in L_{k+1}$, $\|y_{k+1}\| = 1$ 且

$$\|y_{k+1} - x\| \geqslant \frac{1}{2}$$

对任意 $x \in L_k$. 我们来计算 $\|Ay_m - Ay_n\|$, 例如设 $m > n$. 我们有

$$\begin{aligned} Ay_m - Ay_n &= \lambda_m y_m + T_{\lambda_m} y_m - \lambda_n y_n - T_{\lambda_n} y_n \\ &= \lambda_m y_m - \tilde{x}, \end{aligned}$$

式中 $\tilde{x} = \lambda_n y_n + T_{\lambda_n} y_n - T_{\lambda_m} y_m$.

我们注意

$$\begin{aligned} T_{\lambda_m} y_m = Ay_m - \lambda_m y_m &= A\left(\sum_{i=1}^{m} c_i x_i\right) - \lambda_m \sum_{i=1}^{m} c_i x_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} c_i \lambda_i x_i - \sum_{i=1}^{m} c_i \lambda_m x_i \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1} (\lambda_i - \lambda_m) c_i x_i.$$

因此 $T_{\lambda_m} y_m \in L_{m-1}$. 因为 $y_n \in L_n \subset L_m \subset L_{m-1}$, $T_{\lambda_n} y_n \in L_{n-1} \subset L_{m-1}$, 所以 $\tilde{x} \in L_{m-1}$. 令 $\tilde{x} = \lambda_m \tilde{y}$, $\tilde{y} \in L_{m-1}$. 我们有

$$\|Ay_m - Ay_n\| = \|\lambda_m y_m - \lambda_m \tilde{y}\| = |\lambda_m| \|y_m - \tilde{y}\|$$
$$\geqslant \alpha \frac{1}{2}.$$

从而序列 $\{Ay_n\}$ 和它的任一子序列均不收敛. 在另一面,又因 $\{y_n\}$ 为有界集,所以 $\{Ay_n\}$ 紧,从而含收敛子序列. 由得出的矛盾证明了定理.

定理 7 特征化了所谓全连续算子的谱的"离散性".

§3. Schauder 原理及其应用

设M为 Banach 空间E的一个集, 且A是一个一般为非线性的算子定义于M上且映M于其自身.

算子A称为在M是紧的, 如果它映M的每一有界子集于紧集. 此外若A在M上也连续, 那么它称为在这个集上是**全连续的**(如果A线性, 那么这个定义与以前的一致). 不失一般性,以后可以假设集M是有界的.

对于映 Banach 空间的凸体于其自身的全连续算子 Schauder 证明了一个不动点原理,推广了熟知的 Brouwer 关于映 n 维欧氏空间凸体于其自身的连续映象的不动点存在定理. Schauder 定理对于证明各种类型的方程的解的存在有许多应用.

三个引理 为了证明 Schauder 定理先证明三个辅助引理.

设M为 Banach 空间的一个集. $\{A_n\}$ 是一个一般为非

线性的定义于M上的算子序列. 我们说这个序列在M上一致收敛于算子 A_0, 如果对任意 $\varepsilon>0$ 存在仅依赖于 ε 的下标 n_0 使得

$$\|A_n x - A_0 x\| < \varepsilon$$

对 $n \geqslant n_0$ 和任意 $x \in M$.

引理 1 如果M上全连续算子序列 $\{A_n\}$ 在M上一致收敛于 A_0, 那么 A_0 也在M上全连续.

先证算子 A_0 在M上的连续性. 设 $\{x_n\} \subset M$ 收敛于 $x_0 \in M$. 我们有

$$\|A_0 x_m - A_0 x_0\| \leqslant \|A_0 x_m - A_n x_m\| + \|A_n x_m - A_n x_0\| + \|A_n x_0 - A_0 x_0\|.$$

由于算子序列$\{A_n\}$在M上一致收敛于算子 A_0, 所以对给定的 $\varepsilon>0$ 存在 n_0 使对 $n \geqslant n_0$.

$$\|A_n x_m - A_0 x_m\| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \|A_n x_0 - A_0 x_0\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

固定这个 n.

因为 A_n 连续所以存在 m_0 当 $m \geqslant m_0$ 时有

$$\|A_n x_m - A_n x_0\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

因此对 $m \geqslant m_0$ 有

$$\|A_0 x_m - A_0 x_0\| < \varepsilon,$$

即算子 A_0 连续.

我们未证明 A_0 的紧性. 为此只须证集 $A_0(M)$ 紧.

对给定的 $\varepsilon>0$ 选 n_0 使

$$\|A_{n_0} x - A_0 x\| < \varepsilon,$$

对所有 $x \in M$. 这是可能的,因为序列$\{A_n\}$一致收敛于 A_0. 令 $N = A_{n_0}(M)$. 集N是紧的而且是对 $A_0(M)$ 的 ε-网(见§1 定理 2 的证明),由此可知 $A_0(M)$ 是紧的.

这就证明了 A_0 是连续且紧的算子，引理证完.

引理 2 (J. Schauder) 每一在集M上的全连续算子A都是连续有限维算子(映M于空间E的有限维子空间)序列$\{A_k\}$的在M上一致收敛极限.

因为A是全连续算子，所以$A(M)$是紧集. 取收敛于零的正数序列 $\{\varepsilon_k\}$，对每一k构造对 $A(M)$ 的且含于此集的 ε_k-网.

$$N_k = \{y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \cdots, y_{m_k}^{(k)}\}.$$

在 $A(M)$ 上定义算子 P_k，令对 $y \in A(M)$

$$P_k(y) = \frac{\sum_{i=1}^{m_k} \mu_i^{(k)}(y) y_i^{(k)}}{\sum_{i=1}^{m_k} \mu_i^{(k)}(y)}, \tag{1}$$

式中

$$\mu_i^{(k)}(y) = \begin{cases} \varepsilon_k - \|y - y_i^{(k)}\| & 若\ \|y - y_i^{(k)}\| < \varepsilon_k, \\ 0 & 若\ \|y - y_i^{(k)}\| \geqslant \varepsilon_k. \end{cases}$$

等式(1)对任意 $y \in A(M)$ 有意义，因为所有 $\mu_i^{(k)}(y) \geqslant 0$ 而且 $\mu_i^{(k)}(y) > 0$ 至少对一个 i.

算子 $P_k(y)$ 在 $A(M)$ 上连续. 这是因为所有 $\mu_i^{(k)}(y)$ 是连续函数，从而 $\sum_{i=1}^{m_k} \mu_i^{(k)}(y)$ 也是 y 的连续函数. 此外 $\sum_{i=1}^{m_k} \mu_i^{(k)}(y) > 0$ 对每一 $y \in A(M)$，由此得出

$$\frac{\mu_i^{(k)}(y)}{\sum_{j=1}^{m_k} \mu_j^{(k)}(y)}$$

的连续性，从而

$$\frac{\sum_{i=1}^{m_k} \mu_i^{(k)}(y) y_i^{(k)}}{\sum_{i=1}^{m_k} \mu_i^{(k)}(y)}$$

即 $P_k(y)$ 的连续性。此外

$$\|y - P_k(y)\| = \left\| y - \frac{\sum_{i=1}^{m_k} \mu_i^{(k)}(y) y_i^{(k)}}{\sum_{i=1}^{m_k} \mu_i^{(k)}(y)} \right\|$$

$$= \left\| \frac{\sum_{i=1}^{m_k} \mu_i^{(k)}(y)(y - y_i^{(k)})}{\sum_{i=1}^{m_k} \mu_i^{(k)}(y)} \right\|$$

$$\leqslant \frac{\sum_{i=1}^{m_k} \mu_i^{(k)}(y) \|y - y_i^{(k)}\|}{\sum_{i=1}^{m_k} \mu_i^{(k)}(y)} < \varepsilon_k \frac{\sum_{i=1}^{m_k} \mu_i^{(k)}(y)}{\sum_{i=1}^{m_k} \mu_i^{(k)}(y)}$$

$$= \varepsilon_k,$$

这因为若对某一 i 我们有

$$\|y - y_i^{(k)}\| \geqslant \varepsilon_k,$$

那么对应系数 $\mu_i^{(k)}(y)$ 等于零.

今对 $x \in M$ 令

$$A_k x = P_k(Ax),$$

我们就得出有限维算子序列 $\{A_k\}$ 使

$$\|Ax - A_k x\| = \|Ax - P_k(Ax)\| < \varepsilon_k$$

对任意 $x \in M$，引理证完.

注. 因为元 $y_i^{(k)}$ 属于集 $A(M)$，所以在引理 2 构造的算子的值属于集 $A(M)$ 的凸包.

引理 3 设M上的全连续算子序列$\{A_n\}$在此集上一致收敛于算子A_0. 且令

$$K_n = A_n(M),\ n = 0, 1, 2, \cdots$$

那么集

$$K = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$$

紧.

依引理 1 算子A_0全连续. 因为序列$\{A_n\}$一致收敛于算子A_0, 所以对任意$\varepsilon > 0$和任意$y \in K_n$, 当$n \geqslant n_0(\varepsilon)$可定$u \in K_0$使

$$\|y - u\| < \varepsilon.$$

这是可能的, 因为若y是K_n任意元, 且x是y在映象A_n之下的原像之一. 那么作为u只须取$u = A_0(x)$.

构造集$N = \bigcup_{n=0}^{n_0} K_n$. 不难看出它是紧集. 可证这个集是对$K$的$\varepsilon$-网.

设$y \in K$. 若

$$y \in \bigcup_{n=0}^{n_0} K_n,$$

则证明完毕.

若$y \in K_n$且$n > n_0$, 那么有如上面所指出的那样, 存在$u \in K_0$使

$$\|y - u\| < \varepsilon.$$

从而N是对集K的紧ε-网, 因此某K紧.

J. Schauder **不动点原理** **定理 1** 如果全连续算子A映Banach 空间E内有界闭凸集S于其自身, 那么这个映象的不动点存在, 即存在$x \in S$使$Ax = x$.

取正数列 $\{\varepsilon_n\}$ 收敛于零. 依引理 2 构造连续有限维算子序列 $\{A_n\}$ 在 S 上一致收敛于 A.

再依引理 2 下的注,因为 S 是凸的,所以 $A_n x\in S$ 对任意 $x\in S$. 设 E_n 为有限维子空间在其内含有集 $A_n(S)$. 在子空间 E_n 的集

$$S_n = S\cap E_n$$

上考虑算子 A_n. 显然 S_n 也是凸闭集.

因为

$$A_n(S)\subset S,\quad 且\quad A_n(S)\subset E_n,$$

所以
$$A_n(S)\subset S_n$$
从而
$$A_n(S_n)\subset S_n.$$

因此当算子 A_n 在有限维空间 E_n 上考虑时，它映 E_n 的闭凸集 S_n 于其自身,所以依 Brouwer 定理(见附录 III) 存在这个映象的不动点,即是说,存在点 $x_n\in S_n$ 使

$$A_n x_n = x_n.$$

但因 $S_n\subset S$，所以 x_n 也是算子 A_n 映集 S 的不动点.

因为每一

$$x_n\in A_n(S),$$

所以序列 $\{x_n\}$ 属于集

$$\tilde{S} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n(S)\subset S.$$

由引理 3 集 $\tilde{S}$ 紧. 那么序列 $\{x_n\}$ 含收敛子序列 $\{x_{n_i}\}$，而且因为 S 闭,此子序列的极限 x_0 也属于 S.

今证 x_0 是算子 A 的不动点. 我们有

$$\begin{aligned}&\|Ax_0 - x_0\|\\ &\leqslant \|Ax_0 - Ax_{n_i}\| + \|Ax_{n_i} - A_{n_i}x_{n_i}\| + \|A_{n_i}x_{n_i} - x_0\|\\ &= \|Ax_0 - Ax_{n_i}\| + \|Ax_{n_i} - A_{n_i}x_{n_i}\| + \|x_{n_i} - x_0\|.\end{aligned}$$

对给定 $\varepsilon > 0$ 先选 n' 充分大使对 $n_i \geqslant n'$

$$\|x_{n_i}-x_0\|<\frac{\varepsilon}{3} \quad 和 \quad \|Ax_0-Ax_{n_i}\|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

然后再选 n'' 充分大使对 $n_i \geqslant n''$

$$\|Ax-A_{n_i}x\|<\frac{\varepsilon}{3}$$

在 S 上一致成立，特别对所有 x_{n_i}. 于是对 $n_i \geqslant n_0 = \max(n', n'')$ 我们有

$$\|Ax_0-x_0\|<\varepsilon.$$

因为 ε 是任意的，所以 $Ax_0=x_0$，即 x_0 为算子 A 的不动点. Schauder 原理证完.

作为 Schauder 原理的应用例，我们证明熟知的有关常微分方程的解的 Peano 存在定理.

定理 2 设函数 $f(t,x)$ 依两变数的全体在区域 $|t-t_0|\leqslant a$，$|x-x_0|\leqslant b$ 内连续. 令 β 代表 $|f(t,x)|$ 在此区域内极大值. 令

$$h=\min\left(a, \frac{b}{\beta}\right),$$

那么在区间 $[t_0-h, t_0+h]$ 内至少存在方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x) \tag{2}$$

的一个解满足条件

$$x(t_0)=x_0. \tag{3}$$

方程(2)及其初值条件(3)等价于积分方程

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau. \tag{4}$$

考虑由等式

$$Ax=x_0+\int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau$$

在空间 $C[t_0-h, t_0+h]$ 内的球 $\|x-x_0\|\leqslant b$ 上定义的算子 A. 我们证明算子 A 在这个球上全连续.

首先,如果属于球 $\|x-x_0\|\leqslant b$ 的序列 $\{x_n(t)\}$ 一致收敛于显然也属于此球的函数 $x(t)$, 那么由函数 $f(t,x)$ 的连续性,可知

$$f(t,x_n(t))\to f(t, x(t))$$

在区间 $[t_0-h, t_0+h]$ 上一致成立. 那么由于一致收敛性可在积分号下取极限,所以也有

$$Ax_n\to Ax,$$

即算子 A 在球 $\|x-x_0\|\leqslant b$ 上连续.

此外,对球 $\|x-x_0\|\leqslant b$ 的任意元 $x(t)$, 我们有

$$|Ax(t)|\leqslant|x_0|+\left|\int_{t_0}^{t}f(\tau,x(\tau))d\tau\right|\leqslant|x_0|+\beta|h|. \tag{5}$$

因此若 t_1 和 t_2 是区间 $[t_0-h, t_0+h]$ 上任两点,那么

$$|Ax(t_1)-Ax(t_2)|\leqslant\left|\int_{t_1}^{t_2}f(\tau,x(\tau))d\tau\right|\leqslant\beta|t_2-t_1|. \tag{6}$$

由 Arzelá 定理及不等式(5)和(6)可知算子 A 映球 $\|x-x_0\|\leqslant b$ 于紧集.

最后再证算子 A 映球 $\|x-x_0\|\leqslant b$ 于其自身. 事实上

$$|Ax(t)-x_0|=\left|\int_{t_0}^{t}f(\tau,x(\tau))d\tau\right|\leqslant\beta h\leqslant\beta\cdot\frac{b}{\beta}=b.$$

既然算子 A 满足 Schauder 定理所有条件,因而存在这个算子的不动点. 即函数 $x(t)$ 使

$$x(t)\equiv x_0+\int_{t_0}^{t}f(\tau,x(\tau))d\tau.$$

这个等式等价于以下两个等式:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0.$$

Peano 定理证完.

在证明 Peano 定理的时候,我们用 Schauder 定理来断定积分方程 (4) 的解的存在. 同样原理可以应用于证明更复杂的非线性积分方程以及微积分方程的解的存在.

§ 4 Соболев 嵌入算子的全连续性

我们在第二章 § 5 证明过 Соболев 嵌入定理: 由函数 $\varphi(x, y)$ 属于类 $w_p^{(l)}$ 蕴含此函数属于类 $w_p^{(k)}$ 对 $k < l$.

引入算子 A,定义在所有函数 $\varphi(x, y) \in w_p^{(l)}$ 上且映 $\varphi(x, y)$ 于同一函数,而它已经看做是 $w_p^{(k)}$ 的元. 显然,对不同的 k 它将是不同的算子. 算子 A 称嵌入算子,它显然是线性的,而且由第二章 § 5 不等式知此算子也有界.

现在我们证明 A 甚至是全连续的. 算子 A 的全连续性由下述定理得出.

定理 (В. И. Кондрашов) 设 $\mathfrak{M}$ 为空间 $w_p^{(l)}$ 内的有界集. 若 $p > 2$, 那么集 $A(\mathfrak{M})$ 在一致收敛意义下为紧集. 若 $p \leqslant 2$, 那么 $A(\mathfrak{M})$ 在空间 $L_p(G)$ 的距离意义下为紧集.

依 С. Л. Соболев 公式

$$A\varphi = \varphi(x, y) = \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{k_1 + k_2 = k} C_{k_1 k_2}^{(k)}(P)$$

$$\times \iint_G \varphi(Q) \frac{\partial^k \omega_k}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}} dQ$$

$$+ \sum_{l_1 + l_2 = l} \iint_G A_{l_1 l_2}^{(l)}(P, Q) \frac{\partial^l \varphi}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}} dQ. \quad (1)$$

由 $\frac{\partial^k \omega_k}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}}$ 的连续性，公式（1）的第一组的项是具有连续核的积分算子．从而在 $C(G)$ 和 $L_p(G)$ 的距离意义下都是全连续算子，为此只须研究公式(1)的后一组的项．在第二组的积分算子的核 $A^{(l)}_{l_1l_2}(P,Q)$ 的形式是

$$A(P,Q)=\frac{B(P,Q)}{r}$$

或
$$A(P,Q)=B(P,Q)(\alpha\ln r+\beta),$$

式中 $B(P,Q)$ 为有界函数

$$|B(P,Q)|\leqslant c.$$

我们来证明具有这样核的积分算子的全连续性．

考虑 $P>2$ 的情形并限于对 $A(P,Q)$ 的第一表达式．我们有

$$\left|\iint\limits_G A^{(l)}_{l_1l_2}(P,Q)\frac{\partial^l\varphi}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}dQ\right|\leqslant C\iint\limits_G\frac{\left|\frac{\partial^l\varphi}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}\right|}{r}dQ$$
$$\leqslant C\left(\iint\limits_G\left|\frac{\partial^l\varphi}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}\right|^p dQ\right)^{\frac{1}{p}}\left(\iint\limits_G r^{-q}dQ\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leqslant C\|\varphi\|_{w_p^{(l)}}\left(\int_0^{2\pi}\int_0^{\rho}r^{-q+1}drd\theta\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant CK(2\pi)^{\frac{1}{q}}(B)^{\frac{1}{q}}.\qquad(2)$$

式中 K 为常数是函数 $\varphi(x,y)$ 在空间 $w_p^{(l)}$ 的范数的界，且 B 为积分 $\int_0^{\rho}r^{-q+1}dr$ 的值，而此积分当 $q<2$ 即 $p>2$ 时收敛．

现在引入简单记号

$$\psi(P)=\iint\limits_G A^{(l)}_{l_1l_2}(P,Q)\frac{\partial^l\varphi}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}dQ.$$

我们有

$$|\psi(P+\Delta P)-\psi(P)|$$

$$\leqslant C\left\{\iint\limits_{G-G_\delta}\left|\frac{1}{r_{P+\Delta P,Q}}-\frac{1}{r_{P,Q}}\right|\left|\frac{\partial^l\varphi}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}\right|dQ\right.$$

$$\left.+\iint\limits_{G_\delta}\frac{1}{r_{P+\Delta P,Q}}\left|\frac{\partial^l\varphi}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}\right|dQ+\iint\limits_{G_\delta}\frac{1}{r_{P,Q}}\left|\frac{\partial^l\varphi}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}\right|dQ\right\}\tag{3}$$

式中 G_δ 代表 G 的这样一个部分，它由与 P 的距离小于 2δ 的点所组成. 此外，我们也认为点 P 到点 $P+\Delta P$ 的距离不超过 δ.

由于所有这些,在第一积分号下的 $\dfrac{1}{r_{P,Q}}$ 将是连续函数,因而第一项可使之任意小只要 ΔP 充分小的话. 至于第二项我们可以引入极坐标以 $P+\Delta P$ 为中心，由此得不等式

$$\iint\limits_{G_\delta}\frac{1}{r_{P+\Delta P,Q}}\left|\frac{\partial^l\varphi}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}\right|dQ$$

$$\leqslant\left(\iint\limits_G\left|\frac{\partial^l\varphi}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}\right|^p dQ\right)^{\frac{1}{p}}\left(\iint\limits_G\left|\frac{1}{r_{P+\Delta P,Q}}\right|^q dQ\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant K(2\pi)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^{3\delta}\frac{1}{r^q}r\,dr\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant K(2\pi)^{\frac{1}{q}}\frac{1}{2-q}(3\delta)^{2-q},$$

且此不等式右边当 δ 充分小时可使之任意小,如果 $q<2$, 即 $p>2$ 的话. 同理可以对第三个积分估值,从而函数 $\psi(P)$ 的等度连续性得证,随之也证明了定理的第一部分.

现在来考虑 $p\leqslant 2$ 的情形,有如以上我们有

$$|\psi(P+\Delta P)-\psi(P)|$$

$$\leqslant C\left\{\iint\limits_{G-G_\delta}\left|\frac{1}{r_{P+\Delta P,Q}}-\frac{1}{r_{P,Q}}\right|\left|\frac{\partial^l\varphi}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}\right|dQ\right.$$

$$+\iint_{G_\delta}\frac{1}{r_{P+\Delta P,Q}}\left|\frac{\partial^l\varphi}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}\right|dQ$$

$$+\iint_{G_\delta}\frac{1}{r_{P,Q}}\left|\frac{\partial^l\varphi}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}\right|dQ\ \Big\}\tag{3'}$$

仍由$\frac{1}{r_{P,Q}}$的连续性，第一积分对充分小的 ΔP 可使之依 L_p 的范数任意小。对第二项我们得出类似于以前的不等式

$$\left\|\iint_{G_\delta}\frac{1}{r_{P+\Delta P,Q}}\left|\frac{\partial^l\varphi}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}\right|dQ\right\|_{L_p}^p$$

$$=\iint_G\left[\iint_G\frac{1}{r_{P+\Delta P,Q}}\left|\frac{\partial^l\varphi}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}\right|dQ\right]^p dP$$

$$\leqslant\iint_G\left\{\iint_{G_\delta}\frac{1}{r_{P+\Delta P,Q}}\left|\frac{\partial^l\varphi}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}\right|^p dQ\right\}$$

$$\times\left\{\iint_{G_\delta}\frac{1}{r_{P+\Delta P,Q}}dQ\right\}^{\frac{p}{q}}dP$$

$$\leqslant(2\pi)^{\frac{p}{q}}(3\delta)^{\frac{p}{q}}\iint_G\left\{\iint_G\frac{1}{r_{P+\Delta P,Q}}\left|\frac{\partial^l\varphi}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}\right|^p dQ\right\}dP$$

$$=(6\pi\delta)^{\frac{p}{q}}\iint_G\left\{\left|\frac{\partial^l\varphi}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}\right|^p\iint_G\frac{1}{r_{P+\Delta P,Q}}dP\right\}dQ$$

$$\leqslant(6\pi\delta)^{\frac{p}{q}}2\pi DK^p,$$

式中D代表区域G的直径．由所得不等式可知

$$\left\|\iint_{G_\delta}\frac{1}{r_{P+\Delta P,Q}}\left|\frac{\partial^l\varphi}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}\right|dQ\right\|$$

可使之任意小如果 δ 充分小的话．

完全同理可对公式(3)的第三项的范数估值．由此可得

$$\|\phi(P+\Delta P)-\phi(P)\|_{L_p}\to 0 \quad 对\ \Delta P\to 0.$$

用类似计算可以得出平均函数 $\phi(P)$ 的一致有界性. 于是依 Riesz 定理知函数 $\phi(P)$ 构成紧集. 定理证完.

为了证明嵌入算子的完全连续性只须应用 Соболев 定理以及对 $k\leqslant l$ 用 l 阶广义导数表示 k 阶广义导数的 Соболев 公式.

我们仅限于两个独立变数的情形. 多变数的情形以及更复杂的区域在 Соболев 的书[30]讨论过.

我们举一个应用嵌入定理于数学物理方程的例子.

设 G 是被考虑过的形式的平面区域. 我们证明存在 λ 值使方程

$$\Delta\varphi+\lambda\varphi=0$$

在 G 的内部有非平凡解,且此解满足条件

$$\varphi|_\Gamma=0,\ \Gamma 为 G 的边界.$$

(Disichlet 问题的本征函数)

我们减弱第二条件: 我们要求 $\varphi\in\dot{w}_2^{(1)}$ 代替等式 $\varphi|_\Gamma=0$. 式中 $\dot{w}_{(2)}^{(1)}$ 代表 $w_{(2)}^{(1)}$ 的子空间,它由在域 G 的某一边界带形(随函数而异)内为零的函数序列在此空间距离意义下的极限函数所组成.

在 $w_2^{(1)}(G)$ 内考虑泛函

$$J(\varphi)=\iint_G\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right\}dxdy.$$

这个泛函下有界,从而在使

$$\iint_G\varphi^2(x,y)dxdy=1$$

的函数 $\varphi(x,y)\in\dot{w}_2^{(1)}$ 上它有下确界 λ_0. 显然 $\lambda_0>0$.

我们证明泛函 J 的这个下确界在某一函数 $\varphi_0(x,y)\in\dot{w}_2^{(1)}$ 上达到. 设 $\{\varphi_n(x,y)\}\subset\dot{w}_2^{(1)}$ 是极小化序列,即

$$J(\varphi_n) = \lambda_n \to \lambda_0, \quad \|\varphi_n\|_{L_2} = 1. \tag{4}$$

因为
$$\|\varphi_n\|^2_{w_2^{(1)}} = \|\varphi_n\|^2_{L_2} + J(\varphi_n) \tag{5}$$

且 $\{J(\phi_n)\}$ 由于它收敛于某一极限，所以有界，因此 $\{\varphi_n\}$ 是空间 $w_2^{(1)}$ 的有界序列．再因嵌入算子的全连续性，所以 $\{\varphi_n\}$ 在空间 L_2 紧．如果必要的话除去序列某些项，我们可以假设极小化序列 $\{\varphi_n\}$ 在空间 L_2 收敛．因此任与 $\varepsilon > 0$ 存在下标 n_0 当 $n \geqslant n_0$ 时

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|_{L_2} < \varepsilon.$$

此外

$$\left\|\frac{\varphi_n + \varphi_m}{2}\right\|^2_{L_2} + \left\|\frac{\varphi_n - \varphi_m}{2}\right\|^2_{L_2}$$
$$= \frac{1}{2}\|\varphi_n\|^2_{L_2} + \frac{1}{2}\|\varphi_m\|^2_{L_2} = 1,$$

所以

$$\left\|\frac{\varphi_n + \varphi_m}{2}\right\|^2_{L_2} = 1 - \left\|\frac{\varphi_n - \varphi_m}{2}\right\|^2_{L_2} > 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}$$
$$n \geqslant n_0.$$

因为

$$\lambda_0 = \inf_{\varphi \in w_2^{(1)}, \|\varphi\|_{L_2}=1} J(\varphi),$$

所以由 $J(\varphi)$ 的平方齐性有

$$\inf_{\varphi \in w_2^{(1)}} \frac{J(\varphi)}{\|\varphi\|^2_{L_2}} = \inf_{\varphi \in w_2^{(1)}, \|\varphi\|_{L_2}=1} J(\varphi) = \lambda_0.$$

由此
$$J(\varphi) \geqslant \lambda_0\|\varphi\|^2_{L_2},$$

且特别有

$$J\left(\frac{\varphi_n + \varphi_m}{2}\right) \geqslant \lambda_0\left\|\frac{\varphi_n + \varphi_m}{2}\right\|^2_{L_2}$$
$$> \lambda_0\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right).$$

今选n和m充分大使

$$J(\varphi_n) < \lambda_0 + \varepsilon, \quad J(\varphi_m) < \lambda_0 + \varepsilon.$$

于是

$$J\left(\frac{\varphi_n - \varphi_m}{2}\right) = \frac{1}{2} J(\varphi_n) + \frac{1}{2} J(\varphi_m) - J\left(\frac{\varphi_n + \varphi_m}{2}\right) < \lambda_0 + \varepsilon - \lambda_0\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right) = \varepsilon\left(1 - \lambda_0 \frac{\varepsilon}{4}\right),$$

即

$$J\left(\frac{\varphi_n - \varphi_m}{2}\right) \to 0$$

对 $n, m \to \infty$. 于是公式(5)指出，不仅

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|_{L_2} \to 0,$$

而且

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|_{w_2^{(1)}} \to 0$$

对 $n, m \to \infty$. 由空间 $w_2^{(1)}$ 的完备性，存在函数 $\varphi_0(x, y) \in w_2^{(1)}$ 而是序列 $\{\varphi_n\}$ 在空间 $w_2^{(1)}$ 的极限.

显然，$\|\varphi_0\|_{L_2} = 1$， $\varphi_0(x, y) \in \dot{w}_2^{(1)}$.

由对任意函数 $\varphi, \psi \in w_2^{(1)}$ 均成立的不等式

$$|J(\varphi)^{\frac{1}{2}} - J(\psi)^{\frac{1}{2}}| \leqslant [J(\varphi - \psi)]^{\frac{1}{2}},$$

可得

$$|J(\varphi_n)^{\frac{1}{2}} - J(\varphi_0)^{\frac{1}{2}}| \leqslant [J(\varphi_n - \varphi_0)]^{\frac{1}{2}} \leqslant \|\varphi_n - \varphi_0\|_{w_2^{(1)}}.$$

即

$$J(\varphi_n) \to J(\varphi_0)$$

对 $n \to \infty$. 但在另一方面

$$J(\varphi_n) \to \lambda_0,$$

所以

$$J(\varphi_0) = \lambda_0.$$

这就证明了在 $w_2^{(1)}$ 内存在函数使 $J(\varphi)$ 对条件 $\|\varphi\|_{L_2} = 1$ 实

现极小值.

我们来证明函数 $\varphi_0(x,y)$ 满足方程 $\Delta\varphi_0+\lambda_0\varphi_0=0$.

设 $\zeta(x,y)$ 是 $w_2^{(1)}$ 内任意函数在区域 G 的某一边界带形为零. 对任意实数 t 我们有

$$\frac{J(\varphi_0+t\zeta)}{\|\varphi_0+t\zeta\|_{L_2}^2}\geqslant\lambda_0,$$

由此

$$J(\varphi_0)+2t\iint\limits_G\left\{\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right\}d\xi d\eta+t^2J(\zeta)$$

$$\geqslant\lambda_0\left[\|\varphi_0\|_{L_2}^2+2t\iint\limits_G\varphi_0(\xi,\eta)\zeta(\xi,\eta)d\xi d\eta+t^2\|\zeta\|_{L_2}^2\right].$$

注意 $J(\varphi_0)=\lambda_0$, 且 $\|\varphi_0\|_{L_2}=1$, 可得

$$2t\left\{\iint\limits_G\left[\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right]d\xi d\eta\right.$$

$$\left.-\lambda_0\iint\limits_G\varphi_0(\xi,\eta)\zeta(\xi,\eta)d\xi d\eta\right\}$$

$$+t^2\{J(\zeta)-\lambda_0\|\zeta\|_{L_2}^2\}\geqslant 0.$$

由此

$$\iint\limits_G\left[\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right]d\xi d\eta$$

$$-\lambda_0\iint\limits_G\varphi_0(\xi,\eta)\zeta(\xi,\eta)d\xi d\eta=0 \qquad (6)$$

令 $\psi(t)$ 代表一个函数满足下述条件.

1) $\psi(t)=1$ 对 $0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}$,

2) $\psi(t)=0$ 对 $t\geqslant 1$.

3) $\psi(t)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 内单调减,

4) $\psi(t)$ 在 $(0,\infty)$ 有任意阶连续导数.

显然这样函数存在.

此外令 $Y_0(\sqrt{\lambda_0}\, r) = X(r)$ 代表第二类零阶 Bessel 函数. 如所熟知

$$\Delta X(r) + \lambda_0 X(r) = 0.$$

且 $X(r)$ 在 $r = 0$ 有一个对数型奇点. 令

$$\zeta(x,y) = \left[\psi\left(\frac{r}{h_1}\right) - \psi\left(\frac{r}{h_2}\right)\right] X(r).$$

对 $r \leqslant \rho_1 = \frac{1}{2}\min(h_1,h_2)$ 我们有

$$\psi\left(\frac{r}{h_1}\right) - \psi\left(\frac{r}{h_2}\right) = 1 - 1 = 0,$$

且对 $r \geqslant \rho_2 = \max(h_1, h_2)$

$$\psi\left(\frac{r}{h_1}\right) = \psi\left(\frac{r}{h_2}\right) = 0.$$

从而 $\zeta(x, y)$ 在圆 $r = \rho_1$ 内为零且在圆 $r = \rho_2$ 之外为零. 因此,如果 ρ_2 小于由点 $P(x, y)$ 到区域 G 的边界的距离,那么 $\zeta(x, y)$ 是连续可微任意次的函数且在区域 G 的某一边界带形内为零.

代此函数入(6)式并利用广义导数第二定义可得

$$\iint_G \varphi_0(A\zeta + \lambda_0\zeta)\,d\xi d\eta = 0 \tag{7}$$

令

$$\Omega_h(r) = \frac{1}{C(h)}\left\{\Delta\left[\psi\left(\frac{r}{h}\right)X(r)\right] + \lambda_0\psi\left(\frac{r}{h}\right)X(r)\right\},$$

式中

$$C(h)=\iint\limits_G\left\{\Delta\left[\psi\left(\frac{r}{h}\right)X(r)\right]\right.$$

$$\left.+\lambda_0\psi\left(\frac{r}{h}\right)X(r)\right\}d\xi d\eta.$$

可以证明 $C(h)$ 当 $h\to0$ 时，趋于有限极限 C_0. 由函数$\psi(t)$的性质可得

a) $\Omega_h(r)\equiv0$ 对 $r\geqslant h$ 和 $r\leqslant\frac{h}{2}$(因为在后一情形

$\psi\left(\frac{r}{h}\right)\equiv1$ 且

$$\Delta\left[\psi\left(\frac{r}{h}\right)X(r)\right]+\lambda_0\psi\left(\frac{r}{h}\right)X(r)$$

$$=\Delta X(r)+\lambda_0X(r)=0),$$

b) $\Omega_r(h)$ 具有任意阶连续导数

取 $\Omega_h(r)$ 作为平均化核. 公式(7)可以写成

$$C(h_1)\iint\limits_G\varphi_0(\xi,\eta)\Omega_h(r)d\xi d\eta$$

$$=C(h_2)\iint\limits_G\varphi_0(\xi,\eta)\Omega_h(r)d\xi d\eta.$$

且它导致平均函数之间的等式

$$C(h_1)(\varphi_0)_{h_1}=C(h_2)(\varphi_0)_{h_2},$$

或
$$(\varphi_0)_{h_2}=\frac{C(h_1)}{C(h_2)}(\varphi_0)_{h_1},$$

这说明了两个不同平均函数仅差一个数值因子. 但这时 $\varphi_0(x,y)$ 作平均函数的极限，和它们仅差一个数值因子

$$\varphi_0(x,y)=\frac{C(h)}{C_0}(\varphi_0(x,y))_h.$$

因为平均函数有所有阶连续导数，所以 $\varphi_0(x,y)$ 也有所有阶

连续导数．最后这个等式 (6) 可以写成

$$\iint\limits_G (\Delta\varphi_0 + \lambda\varphi_0)\zeta(\xi,\eta)d\xi d\eta = 0.$$

因为 $\zeta(\xi, \eta)$ 是任一个在边界带形为零的无穷可微函数，所以由变分学基本引理可知在 G 内部

$$\Delta\varphi_0 + \lambda_0\varphi_0 = 0.$$

函数 φ_0 属于定义如上的类 $\mathring{w}_2^{(1)}$。可以证明对两变数的情形由此可得 $\varphi_0|_\Gamma = 0$。

第七章 Hilbert 空间自伴算子谱论初步

§1 自伴算子

如果我们考虑定义在 Hilbert 空间内线性算子，那么由于这个空间的自共轭性以及元的内积的出现，我们可以选取一类算子具有对称或自伴的特性。因而可以对这一类算子较任一 Banach 空间内任一线性算子的研究更为深入。这类算子在分析中以及在理论物理中起着特别重要作用。对它的理论的研究已有大量文献。

共轭算子*) 设H为一 Hilbert 空间. A为定义在H上具有值域为同一空间的有界线性算子. 我们考虑线性泛函

$$f_y(x)=(Ax,y) \tag{1}$$

作为 Hilbert 空间内线性泛函，$f_y(x)$ 具有

$$f_y(x)=(x,y^*)$$

---

*) 设A在H内为有界线性算子(或在H内稠定的无界算子).视H为一 Banach 空间时，那么照本书第四章 §3 的共轭算子 A^* 的定义有 $(Ax,f)=(x,A^*f)$, $x\in H$. $f\in H^*$ (或 $x\in D(A)$, $f\in D(A^*)$). 用 J 代表依 F. Riesz 定理(第四章§2)定义的一对一保范共轭线性对应: $H^*\ni f\leftrightarrow y_f\in H$.我们暂时用记号$\langle,\rangle$代表$H$的内积，并用 A' 代表这里的 A^* (见 (27) 式)那么 $(Ax,f)=f(Ax)=\langle Ax,Jf\rangle$; $(x,A^*f)=(A^*f)(x)=\langle x,JA^*f\rangle$ 故 $\langle Ax,Jf\rangle=\langle x,JA^*f\rangle$ 即 $\langle Ax,y\rangle=\langle x,JA^*J^{-1}y\rangle$. 因此 $A'=JA^*J^{-1}$. 所以这里所说共轭算子 A' 与把H看成 Banach 空间的共轭算子 A^* 不同，但通过上式联系. 为此我们把 A' 称为伴随算子. 但有如本书，为了方便也把 A' 称为共轭算子并记成 A^*. ——译者注

形式，式中 y^* 是空间H某一元，它显然由泛函 f_y 而唯一定义．显然，若 y 变化时，泛函 f_y 也变化，从而元 y^* 也随之变化．这样我们得出一个算子

$$y^* = A^*y$$

定义在H上具有值域于同一空间． 这个算子 A^* 与算子 A 由等式

$$(Ax,y) = (x,A^*y), \tag{2}$$

联系，并称之为算子 A 为共轭算子． 算子 A^* 由公式(2)唯一定义．事实上，若对所有 x 和 y 有

$$(Ax,y) = (x,A^*y) = (x,A_1^*y),$$

由此
$$A^*y = A_1^*y$$

对所有 y，这就是说 $A^* = A_1^*$.

容易看出，这里引入的共轭算子的定义与第四章对Banach空间情形给定的定义形式上是一致的．但在那里我们假定了Banach 空间是实的．但同时认为 Hilbert 空间为复的．然而不难断定在复空间情形对在第四章证明的有关共轭算子的定理仍成立，特别 A^* 为有界算子且

$$\|A^*\| = \|A\|. \tag{3}$$

我们用 A^{**} 代表 A^* 的共轭算子，由等式(2)对任意 $x,y \in H$ 我们有

$$(A^*x,y) = \overline{(y, A^*x)} = \overline{(Ay, x)} = (x,Ay),$$

由此 $A^{**} = A$．同理 $A^{***} = A^*$ 等等．

容易证明

$$(A+B)^* = A^* + B^*,$$
$$(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*,$$
$$(AB)^* = B^*A^*.$$

自伴算子 线性有界算子 A 称为自伴的(或埃米的)如果 $A^* = A$.

例 1.　在 n 维复空间——即有限维 Hilbert 空间一线性算子可以和矩阵 (a_{ik}) 等同，其中矩阵的元为复数．与 (a_{ik}) 共轭的算子是 $(\bar{a}_{ki})$．自伴算子是埃米矩阵，即满足 $a_{ik}=\bar{a}_{ki}$ 的矩阵．

在实矩阵 (a_{ik}) 的情形自伴性就是矩阵的对称性．

例 2.　在 $L_2[0,1]$ 内对以 $K(t,s)$ 为核的 Fredholm 算子，它的共轭算子是以 $\overline{K(s,t)}$ 为核的 Fredholm 算子．自伴性的条件是

$$K(t,s)=\overline{K(s,t)}.$$

在实核的情形这个条件还原成对称性．

例 3.　在空间 $L_2[0,1]$ 内考虑算子 A，它使每一函数 $x(t)\in L_2[0,1]$ 令 $Ax=tx(t)\in L_2[0,1]$ 与之对应．易证这个算子是自伴的．

由上述可知，若 A 自伴且 λ 为实数，那么 λA 也自伴．若 A 与 B 自伴则 $A+B$ 也自伴．又 AB 自伴当且仅当算子 A 和 B 可换．最后也不难看出，若 $A_n\to A$ 在依算子空间内范数的意义下收敛或在按点收敛的意义下成立，且所有 A_n 均为自伴算子，那么 A 也是自伴算子．

我们考虑 (Ax,y)，式中 A 为自伴算子．作为 x 和 y 的泛函，并把它记成 $A(x,y)$ 那么它满足条件

$$A(\alpha x_1+\beta x_2,y)=\alpha A(x_1,y)+\beta A(x_2,y),$$

$$A(xy)=\overline{A(y,x)}.$$

这样泛函称**双线性埃米型**．它在下述意义下是有界的：

$$|A(x,y)|\leqslant C_A\|x\|\|y\|,$$

式中 C_A 为某一常数（在此是 $C_A=\|A\|$）．

因此每一自伴算子 A 产生某一有界双线性埃米型，

$$A(x,y)=(Ax,y)=(x,Ay).$$

反之，如果给定有界双线性埃米型，$A(x, y)$，那么它产生某一自伴算子 A 满足等式

$$A(x,y) = (Ax,y).$$

事实上在 $A(x, y)$ 中固定元 y，我们得出 x 的线性泛函．从而

$$A(x,y) = (x,y^*),$$

元 y^* 唯一被确定．由此我们得出一个算子 A 由等式

$$Ay = y^*$$

定义．由此

$$(x,Ay) = A(x,y)$$

A 显然是线性的．易证 A 为有界算子，事实上

$$|(x,Ay)| = |A(x,y)| \leqslant C_A\|x\|\|y\|.$$

令 $x = Ay$，并以 $\|Ay\|$ 除等式两端可得

$$\|Ay\| \leqslant C_A\|y\|.$$

再证 A 是自伴的．对任意 x 和 $y \in H$ 我们有

$$(x,Ay) = \overline{A(y, x)} = \overline{(y, Ax)} = (Ax,y),$$

由此 $A = A^*$ 且 $A(x,y) = (Ax,y)$.

二次型 在双线性埃米型 $A(x,y)$ 中令 $y = x$，我们得出二次型，它对所有 x 取实值且

$$A(\alpha x + \beta y,\alpha x + \beta y) = \alpha\bar{\alpha}A(x,x) + \alpha\bar{\beta}A(x,y) + \bar{\alpha}\beta A(y,x) + \beta\bar{\beta}A(y,y).$$

这样的二次型称对应于双线性埃米型 $A(x, y)$ 的二次埃米型．如果给定双线性埃米型 $A(x,y)$，这就给定了对应的二次埃米型$A(x,x)$．反之也成立．给定二次型 $A(x,x)$，那么它唯一确定一个与它对应的双线性埃米型 $A(x,y)$． 这个双线性型由下述等式定义：

$$A(x, y) = \frac{1}{4}\{[A(x_1,x_1) - A(x_2, x_2)]$$

$$+ i[A(x_3,x_3) - A(x_4,x_4)]\},$$

式中 $$x_1 = x + y, \quad x_2 = x - y,$$

$$x_3 = x + iy, \quad x_4 = x - iy.$$

不难证明这个二次埃米型 $A(x,x)$ 有界,即

$$|A(x,x)| \leqslant C_A\|x\|^2,$$

当且仅当对应的双线性埃米型有界.

令 $m = \inf\limits_{\|x\|=1}(Ax,x)$, $M = \sup\limits_{\|x\|=1}(Ax,x)$,

数 m 和 M 依次称自伴算子 A 的**下界**和**上界**. 可证

$$\|A\| = \max(|m|,|M|) = \sup_{\|x\|=1}|(Ax,x)|.$$

事实上,令 $\|x\| = 1$ 可得

$$|(Ax,x)| \leqslant \|Ax\|\|x\| \leqslant \|A\|\|x\|^2 = \|A\|.$$

从而 $$C_A = \sup_{\|x\|=1}|(Ax,x)| \leqslant \|A\|. \tag{4}$$

在另一方面对任一 $y \in H$ 我们有

$$(Ay,y) \leqslant C_A\|y\|^2.$$

因此如果 z 是 H 任一异于零的元,那么令

$$\lambda = \left(\frac{\|Az\|}{\|z\|}\right)^{\frac{1}{2}} \quad 和 \quad u = \frac{1}{\lambda}Az,$$

我们将有

$$\|Az\|^2 = (A(\lambda z), u) = \frac{1}{4}\{(A(\lambda z + u), \lambda z + u)$$

$$- (A(\lambda z - u), \lambda z - u)\}$$

$$\leqslant \frac{1}{4}C_A\{\|\lambda z + u\|^2 + \|\lambda z - u\|^2\}$$

$$= \frac{1}{2}C_A\{\|\lambda z\|^2 + \|u\|^2\}$$

$$= \frac{1}{2}C_A\left\{\lambda^2\|z\|^2 + \frac{1}{\lambda^2}\|Az\|^2\right\}$$

$$= C_A\|z\|\|Az\|.$$

由此 $$\|Az\| \leqslant C_A\|z\|,$$

从而 $$\|A\| \leqslant C_A = \sup_{\|x\|=1} |(Ax,x)|. \tag{5}$$

由(4)和(5)得出所要等式.

由上述证明可知，若自伴算子A和B对所有$x \in H$满足等式

$$(Ax,x) = (Bx,x)$$

那么 $A = B$.

§2 保范算子、射影算子

这一节我们将在一个 Hilbert 空间内考虑两类特殊算子.

线性算子U称为**保范的**，如果它映H于整个H上且保持范数，即对所有$x \in H$,

$$\|Ux\| = \|x\|. \tag{1}$$

不难看出这个映象是一对一的. 因为若 $Ux_1 = Ux_2$，那么 $U(x_1 - x_2) = 0$，从而

$$\|x_1 - x_2\| = \|U(x_1 - x_2)\| = 0,$$

即 $x_1 = x_2$. 因此存在逆算子 U^{-1}，它显然也是保范的. 此外由等式(1)有

$$(Ux,Ux) = \|Ux\|^2 = \|x\|^2 = (x,x),$$

由此 $$(U^*Ux,x) = (x,x) = (Ex, x),$$

在此以及本章以后我们用E代表单位算子. 因为算子 U^*U 及E的二次型相等，所以这两个算子一致[1)]

$$U^*U = E \tag{2}$$

以U及U^{-1}依次乘等式的左边和右边可得

---

1) 对任一有界线性算子 A，算子 A^*A 是自伴的.

$$UU^* = E, \tag{3}$$

由此 $U^* = U^{-1}$. 由(2)也有

$$(Ux, Uy) = (x, y). \quad ^{*)}$$

反之由条件(2)和(3)可知U为保范算子. 因为由它可知存在 $U^{-1} = U^*$, 从而一对一地映H于H上且

$$\|Ux\|^2 = (Ux, Ux) = (U^*Ux, x) = (x, x) = \|x\|^2,$$

即U保持范数.

在坐标 Hilbert 空间l_2内: U矩阵 (u_{ij}) 可作为保范算子的例子,即这样矩阵 (u_{ij}) 其元满足关系

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{ki}\bar{u}_{kj} = \delta_{ij}, \quad \sum_{l=1}^{\infty} u_{il}\bar{u}_{jl} = \delta_{ij}. \tag{4}$$

设给定 Hilbert 空间H内线性算子A以及保范算子U. 算子

$$B = UAU^{-1} = UAU^* \tag{5}$$

称**保范等价于算子** A. 由等式(5)看出保范等价于自伴算子的算子也是自伴的.

容易验证相互保范等价的算子的范数相等.

现在我们引入对以后说来很重要的射影算子的概念.

设L为H的一个子空间, 任一元 $x \in H$ 可唯一地表为

$$x = y + z,$$

式中 $y \in L$, $z \perp L$. 令 $Px = y$, 我们得出定义于全空间H的某一算子且其值域是子空间L. 这个算子称**射影算子**或**在子空间L上的正交射影算子**,并用P_L代表它. 我们来证明P为自伴算子其范数等于一且满足条件 $P^2 = P$.

首先, P是线性算子. 事实上,设

---

*) 如果U映H于H上且 $(Ux, Uy) = (x, y)$ 那么这也等价于U是保范的. ——译者注

$$x_1 = y_1 + z_1 \text{ 且 } x_2 = y_2 + z_2,$$

式中 $y_1, y_2 \in L$ 但 $z_1, z_2 \perp L$. 由此

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = (\alpha y_1 + \beta y_2) + (\alpha z_1 + \beta z_2),$$

且 $$\alpha y_1 + \beta y_2 \in L, \quad \alpha z_1 + \beta z_2 \perp L,$$

由此 $$P(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha P x_1 + \beta P x_2.$$

此外由正交性

$$\|x\|^2 = \|y + z\|^2 = (y + z, y + z) = \|y\|^2 + \|z\|^2.$$

从而 $$\|y\| \leqslant \|x\|,$$

即 $$\|Px\| \leqslant \|x\|$$

对任一 x. 由此 $\|P\| \leqslant 1$, 因为对 $x \in L$ 我们有 $Px = x$, 从而

$$\|Px\| = \|x\|,$$

所以 $$\|P\| = 1.$$

我们证明 P 是自伴算子. 设 x_1 和 x_2 是 H 的任意两元, 且 y_1 和 y_2 是它们在 L 上的射影. 我们有

$$(Px_1, x_2) = (y_1, x_2) = (y_1, y_2),$$

同理

$$(x_1, Px_2) = (x_1, y_2) = (y_1, y_2),$$

从而 $$(Px_1, x_2) = (x_1, Px_2).$$

最后因 $Px \in L$ 对任一 $x \in H$. 因此

$$P^2 x = P(Px) = Px$$

对任一 $x \in H$, 即

$$P^2 = P.$$

现在我们证明逆定理也成立, 即是说, 每一个自伴算子 P 若满足 $P^2 = P$, 那么它是在某一子空间 L 上的正交射影算子.

为此我们考虑形如 $y = Px$ 的元的集 L, 其中 x 通过整个 H. 由于算子 P 的可加性及齐性知 L 是一线性流形. 易证

L是闭的。事实上，设 $y_n \to y_0$，$y_n \in L$，所以 $y_n = Px_n$ 对某一 $x_n \in H$。因此

$$Py_n = P^2 x_n = Px_n = y_n.$$

由算子 P 的连续性可知由 $y_n \to y_0$ 有 $Py_n \to Py_0$。再注意等式 $Py_n = y_n$ 可得 $y_n \to Py_0$，从而也有 $y_0 = Py_0$ 故 $y_0 \in L$。

由算子 P 的自伴性及条件 $P^2 = P$ 我们有

$$(x - Px, Px) = (Px - P^2 x, x) = 0.$$

即
$$x - Px \perp Px.$$

由子空间 L 的定义知 P 是在这个子空间上的射影，从而得证。再注意一下，L 是由满足 $Px = x$ 的所有这样 $x \in H$ 所组成。

由证明也可看出，若 P 为射影算子那么 $I - P$ 也为射影算子。

现在我们来指出射影算子的某些简单性质，两个射影算子 P_1 和 P_2 称为*正交的*如果 $P_1P_2 = 0$[1]。这个条件等价于 $P_2P_1 = 0$。因为若 $P_1P_2 = 0$，那么 $(P_1P_2)^* = P_2P_1 = 0$。反之也成立。

为使射影算子 P_1 和 P_2 正交，必须且只须它们对应的子空间 L_1 和 L_2 成正交。

事实上，若 $P_1P_2 = 0$，那么对 $x_1 \in L_1$ 和 $x_2 \in L_2$ 我们有

$$(x_1, x_2) = (Px_1, Px_2) = (P_2P_1x_1, x_2) = (0, x_2) = 0.$$

反之，若 $L_1 \perp L_2$，那么由 $P_2x \in L_2$ 对任意 $x \in H$ 有 $P_1P_2x = 0$，即 $P_1P_2 = 0$。

引理 1 *为使两个射影算子 P_{L_1} 和 P_{L_2} 的和为射影算子，必须且只须它们成正交。如果这个条件满足，那么*

$$P_{L_1} + P_{L_2} = P_{L_1 \dotplus L_2}.$$

---

1) 0 不仅代表数，也代表零算子。

必要性．设

$$P = P_{L_1} + P_{L_2}$$

为射影算子，那么

$$(P_{L_1} + P_{L_2})^2 = P_{L_1} + P_{L_2}.$$

由此
$$P_{L_1}P_{L_2} + P_{L_2}P_{L_1} = 0$$

左乘 P_{L_1} 可得

$$P_{L_1}P_{L_2} + P_{L_1}P_{L_2}P_{L_1} = 0.$$

再右乘 P_{L_1} 我们有

$$P_{L_1}P_{L_2}P_{L_1} = 0.$$

由此
$$P_{L_1}P_{L_2} = 0.$$

充分性．设

$$P_{L_1}P_{L_2} = P_{L_2}P_{L_1} = 0.$$

于是
$$(P_{L_1} + P_{L_2})^2 = P_{L_1} + P_{L_2}.$$

从而 $P_{L_1} + P_{L_2}$ 是射影算子．

由于条件 $P_{L_1}P_{L_2} = 0$，所以子空间 L_1 和 L_2 正交．若 $x \in H$，那么

$$Px = P_{L_1}x + P_{L_2}x = x_1 + x_2 \in L_1 \dot{+} L_2, \qquad (6)$$

此外若 $x = x_1 + x_2$ 为 $L_1 \dot{+} L_2$ 的元，那么注意等式 $P_{L_1}x_2 = 0$，$P_{L_2}x_1 = 0$，我们有

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = P_{L_1}x_1 + P_{L_2}x_2 \\ &= P_{L_1}(x_1 + x_2) + P_{L_2}(x_1 + x_2) = (P_{L_1} + P_{L_2})x. \end{aligned} \qquad (7)$$

由 (6) (7) 知 P 是 $L_1 \dot{+} L_2$ 上射影算子．引理全部证完．

引理 2 为使两个射影算子 P_{L_1} 和 P_{L_2} 的积为射影算子，必须且只须算子 P_{L_1} 和 P_{L_2} 可换，如果这个条件满足，那么

$$P_{L_1}P_{L_2} = P_{L_1 \cap L_2}.$$

必要性．因 $P = P_{L_1}P_{L_2}$ 为自伴算子，所以

$$P_{L_1}P_{L_2} = (P_{L_1}P_{L_2})^* = P_{L_2}^*P_{L_1}^* = P_{L_2}P_{L_1}.$$

这就证明了可换性．

充分性．设 $P_{L_1}P_{L_2}=P_{L_2}P_{L_1}$，那么 $P=P_{L_1}P_{L_2}$ 为自伴算子．此外

$$(P_{L_1}P_{L_2})^2=P_{L_1}P_{L_2}P_{L_1}P_{L_2}=P_{L_1}^2P_{L_2}^2=P_{L_1}P_{L_2},$$

从而 P 为射影算子．

设 x 为H任一元．于是

$$Px=P_{L_1}P_{L_2}x=P_{L_2}P_{L_1}x$$

同时属于 L_1 和 L_2，即属于 $L_1\cap L_2$．

今设 $y\in L_1\cap L_2$．那么

$$Py=P_{L_1}(P_{L_2}y)=P_{L_1}y=y.$$

所有这些是说 P 是 $L_1\cap L_2$ 上射影算子．引理证完．

射影算子 P_2 称为射影算子 P_1 的**部分**，如果 $P_1P_2=P_2$．移到共轭算子可知这个条件等价于条件 $P_2P_1=P_2$．由定义立刻知道，P_{L_2} 是 P_{L_1} 的部分，必须且只须子空间 L_2 是子空间 L_1的部分．

为使射影算子 P_{L_2} 是射影算子 P_{L_1} 的部分必须且只须对所有 $x\in H$ 满足不等式

$$\|P_{L_2}x\|\leqslant\|P_{L_1}x\|.$$

事实上，由 $P_{L_2}P_{L_1}x=P_{L_2}x$ 可得

$$\|P_{L_2}x\|\leqslant\|P_{L_2}\|\|P_{L_1}x\|\leqslant\|P_{L_1}x\|.$$

反之，若这个条件被满足，那么对任意 $x\in L_2$ 我们有

$$\|P_{L_1}x\|\geqslant\|P_{L_2}x\|=\|x\|.$$

而且因为也有

$$\|P_{L_1}x\|\leqslant\|x\|,$$

所以

$$\|P_{L_1}x\|=\|x\|.$$

由此

$$\|P_{H\dot{-}L_1}x\|^2=\|x\|^2-\|P_{L_1}x\|^2=0.$$

从而 $x\in L_1$．因此 $P_{L_2}x\in L_1$ 对任意 $x\in H$，这就是说 $P_{L_1}P_{L_2}x=P_{L_2}x$，即 $P_{L_1}P_{L_2}=P_{L_2}$，这就是所要证明的．

引理 3 **为使两个射影算子的差** P_1-P_2 **是射影算子，**

必须且只须 P_2 是 P_1 的部分. 如果这个条件满足,那么 $L_{P_1-P_2}$ 是 L_{P_2} 在 L_{P_1} 内的正交余空间.

必要性 若 P_1-P_2 是射影算子,那么

$$E-(P_1-P_2)=(E-P_1)+P_2$$

也是射影算子. 由引理 1 我们有

$$(E-P_1)P_2=0$$

即 $P_1P_2=P_2$.

充分性. 设 P_2 是 P_1 的部分. 那么 $E-P_1$ 和 P_2 正交,且由引理 1 知 $(E-P_1)+P_2$ 为射影算子,从而 P_1-P_2 也是射影算子. 由条件 $P_1P_2=P_2$ 可得 P_1-P_2 和 P_2 正交. 但由同一引理 1

$$L_{P_1}=L_{P_1-P_2}\dotplus L_{P_2},$$

得所欲证.

§3 正算子及其平方根

自伴算子 A 称为正的,并记作 $A>0$, 如果它异于零而且它的下界非负,即若

$$(Ax,x)\geqslant 0$$

对任意 $x\in H$ 且 $(Axx)>0$ 至少对一个 $x\in H$. 我们说自伴算子 A 大于自伴算子 B, 并记作 $A>B$, 如果 $A-B>0$. 在此情形下也说算子 B 小于算子 A. 不难验证,这样在自伴算子的集内引入的顺序关系具有下述性质[1)]

1) 若 $A\geqslant B$, $C\geqslant D$, 那么 $A+C\geqslant B+D$,

2) 若 $A\geqslant 0$, $\alpha\geqslant 0$, 那么 $\alpha A\geqslant 0$,

3) 若 $A\geqslant B$, $B\geqslant C$, 那么 $A\geqslant C$,

---

1) 不等式 $A\geqslant B$ 是说或者 $A>B$ 或者 $A=B$.

4) 若 $A>0$ 且 A^{-1} 存在，那么 $A^{-1}>0$.

显然，AA^* 和 A^*A 对任一异于零的线性算子 A 都是正的. 特别 $A^2>0$ 对任一自伴算子 $A\neq 0$. 作为正算子的例子，由最后这一事实可知在具有维数为正的子空间上的射影算子为正算子.

定理 1 两个可换正自伴算子 A 和 B 的积也是正算子*).

令

$$A_1=\frac{A}{\|A\|},\ A_2=A_1-A_1^2,\cdots,A_{n+1}=A_n-A_n^2\cdots$$

今证对任意 n,

$$0\leqslant A_n\leqslant E. \tag{1}$$

对 $n=1$ 这是显然的. 设(1)对 $n=k$ 成立，那么

$$(A_k^2(E-A_k)x,x)=((E-A_k)A_kx,A_kx)\geqslant 0,$$

即
$$A_k^2(E-A_k)\geqslant 0,$$

同理
$$A_k(E-A_k)^2\geqslant 0.$$

因此
$$A_{k+1}=A_k^2(E-A_k)+A_k(E-A_k)^2\geqslant 0$$

且
$$E-A_{k+1}=(E-A_k)+A_k^2\geqslant 0.$$

从而(1)对 $n=k+1$ 成立.

此外我们有

$$A_1=A_1^2+A_2=A_1^2+A_2^2+A_3=\cdots$$
$$\cdots=A_1^2+A_2^2+\cdots+A_n^2+A_{n+1},$$

由此

$$\sum_{k=1}^{n}A_k^2=A_1-A_{n+1}\leqslant A_1$$

---

*) 可能出现 $A>0$, $B>0$. $AB=BA$ 时 $AB=0$ (例如 A. B. 是两个直交非零闭子空间上的射影算子) 所以通常把 $A\geqslant 0$ 的算子是正算子. 定理中所讲到正算子实际上也是指 $A\geqslant 0$. ——校者注

(因为 $A_{n+1} \geqslant 0$)，即

$$\sum_{k=1}^{n} (A_k x, A_k x) \leqslant (A_1 x, x),$$

从而级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|A_k x\|^2$$

收敛且 $\|A_k x\| \to 0$ 对 $k \to \infty$. 因此

$$\left(\sum_{k=1}^{n} A_k^2\right) x = A_1 x - A_{n+1} x \to A_1 x.$$

因为 B 显然和所有 A_k 可换，我们得

$$\begin{aligned}(ABx, x) &= \|A\| (BA_1 x, x) \\ &= \|A\| \lim_{m} \sum_{k=1}^{n} (BA_k^2 x, x) \\ &= \|A\| \lim_{n} \sum_{k=1}^{n} (BA_k x, A_k x) \geqslant 0.\end{aligned}$$

定理证完.

由它容易得出，若 $\{A_n\}$ 是相互可换的自伴算子的单调增序列，且每一 A_n 都不超过与每一 A_n 可换的自伴算子 B.

$$A_1 \leqslant A_2 \leqslant \cdots \leqslant A_n \leqslant \cdots \leqslant B,$$

那么序列 $\{A_n\}$ 收敛于自伴算子 A 且 $A \leqslant B$. 同样论断对单调减序列成立.

事实上，考虑自伴算子

$$C_n = B - A_n.$$

这些算子是正的，相互可换的且构成单调减序列. 从而对 $m < n$ 算子

$$(C_m - C_n) C_m \text{ 和 } C_n (C_m - C_n)$$

也是正的．由此

$$(C_m^2x,x) \geqslant (C_mC_nx,x) \geqslant (C_n^2x,x).$$

单调减正数序列 $\{(C_n^2x, x)\}$ 有极限．由所得不等式知当 $n,m \to \infty$ 时，(C_mC_nx, x) 也有同一极限．因此对 $n, m \to \infty$

$$\begin{aligned}
&\|C_mx - C_nx\|^2 \\
&= ((C_m - C_n)^2x, x) \\
&= (C_m^2x,x) - 2(C_mC_nx, x) + (C_n^2x,x) \\
&\to 0.
\end{aligned}$$

因此序列 $\{C_nx\}$，这就是说序列 $\{A_nx\}$ 对任意 x 收敛于某一极限．我们用 Ax 代表它．

$$Ax = \lim_n A_nx.$$

显然 A 是自伴算子且满足不等式 $A \leqslant B$．这就是所要证明的．

自伴算子 B 称为正算子 A 的**平方根**，如果 $B^2 = A$．

定理 2 对任一正自伴算子 A 存在唯一正平方根 B，且 B 与所有和 A 可换的算子可换．

不失一般性可设 $A \leqslant E$，

令 $B_0 = 0$，且

$$B_{n+1} = B_n + \frac{1}{2}(A - B_n^2) \quad n = 0,1,\cdots \tag{2}$$

所有算子 B_n 显然是自伴的且与任一和 A 可换的算子可换．特别 $B_nB_m = B_mB_n$．不难验证

$$E - B_{n+1} = \frac{1}{2}(E - B_n)^2 + \frac{1}{2}(E - A) \tag{3}$$

且

$$B_{n+1} - B_n = \frac{1}{2}[(E - B_{n-1}) + (E - B_n)]$$

$$\times (B_n - B_{n-1}). \tag{4}$$

由(3)可得 $B_n \leqslant E$ 对所有 n，也容易证明 $B_n \leqslant B_{n+1}$. 事实上，对 $n=0$ 这是显然的，这是因为

$$B_1 = \frac{1}{2}A > 0 = B_0.$$

此外等式(4)指出 $B_{n+1} - B_n \geqslant 0$ 如果 $B_n - B_{n-1} \geqslant 0$ 的话. 从而 $B_n \leqslant B_{n+1}$ 对所有 n. 因此 $\{B_n\}$ 是有界自伴正算子的单调增序列.

由前述这个序列收敛于某一自伴正算子 B.

等式(2)在极限情形给出

$$B = B + \frac{1}{2}(A - B^2)$$

即

$$B^2 = A.$$

最后，B 与任一个与 A 可换的算子可换这一事实是由于 B_n 具有这一性质. 因此算子 B 具备所有的性质. 由此正自伴算子 A 的正平方根存在这一事实得证.

设 B_1 为 A 的另一正平方根，因为 $B_1A = AB_1$ 即 B_1 与 A 可换，所以 $B_1B = BB_1$. 所以若 x 为 H 任一元，且 $y=(B-B_1)x$，那么

$$\begin{aligned}(By,y) + (B_1y,y) &= ((B+B_1)y,y)\\ &= ((B+B_1)(B-B_1)x,y)\\ &= ((B^2-B_1^2)x,y) = 0,\end{aligned}$$

又因 B 和 B_1 为正算子，所以 $(By,y) = (B_1y,y) = 0$. 既然 B 为正，所以 $B = C^2$，式中 C 为自伴算子. 由于

$\|Cy\|^2 = (C^2y,y) = (By,y) = 0$，所以 $Cy = 0$. 从而 $By = C(Cy) = 0$. 同理 $B_1y = 0$. 由此

$$\begin{aligned}\|B_1x - Bx\|^2 &= ((B-B_1)^2x,x)\\ &= ((B-B_1)y,x) = 0.\end{aligned}$$

即对任意 $x\in H$ 有

$$Bx = B_1x.$$

平方根的唯一性得证.

例. 在空间 $L_2[0,1]$ 内对算子

$$Ax(t) = tx(t),$$

正平方根是算子 B，其中

$$Bx(t) = +\sqrt{t}\,x(t).$$

§4 自伴算子的谱

我们来讨论算子族 $A_\lambda = A - \lambda E$，其中 A 为自伴算子且 λ 为复数.

由第三章 §5 定理 2，可知若 $\left\|\frac{1}{\lambda}A\right\| < 1$（即若 $|\lambda| > \|A\|$），那么 λ 为算子 A 的正则值，从而算子 A 的整个谱含于圆 $|\lambda| \leqslant \|A\|$ 的内部或边界. 这一事实对任一个作用在 Banach 空间内有界线性算子成立. 对给定在 Hilbert 空间内的自伴算子来说，下面我们将指出算子的谱的更为精确的位置.

若 A 为自伴算子，那么它的所有本征值为实值，因为由

$$Ax = \lambda x$$

可得等式

$$(Ax,x) = \lambda(x,x),$$

而两个内积 (Ax, x) 和 (x, x) 又均为实数. 此外由条件 $A = A^*$ 以及本征值为实值和第 IV 章 §3 定理 2 可知对应于不同本征值的本征矢量相互正交.

定理 1 为使 λ 是自伴算子 A 的正则值，必须且只须存在正数 c 使对任一 $x\in H$ 有

$$\|A_\lambda x\| = \|Ax - \lambda x\| \geqslant c\|x\|. \tag{1}$$

必要性．设存在有界算子 $R_\lambda = A_\lambda^{-1}$．且 $\|R_\lambda\| = d$．对任一 $x \in H$ 我们有

$$\|x\| = \|R_\lambda A_\lambda x\| \leqslant d\|A_\lambda x\|.$$

由此

$$\|A_\lambda x\| \geqslant \frac{1}{d}\|x\|.$$

必要性得证．

充分性．设

$$y = Ax - \lambda x.$$

式中 x 通过 H．于是 y 通过某一线性流形 L．由(1)知 x 和 y 的对应是一对一的．因为如果 x_1 和 x_2 映射于同一元 y，那么

$$A(x_1 - x_2) - \lambda(x_1 - x_2) = 0,$$

因此

$$\|x_1 - x_2\| \leqslant \frac{1}{c}\|A_\lambda(x_1 - x_2)\| = 0.$$

今证 L 在 H 内稠密．事实上，如果不然，则存在异于零的 $x_0 \in H$ 使 $(x_0, y) = 0$ 对所有 $y \in L$，这就是说，

$$(x_0,\ Ax - \lambda x) = 0,$$

从而由 A 的自伴性

$$(Ax_0 - \bar{\lambda}x_0,\ x) = 0,$$

这一等式既对任一 $x \in H$ 成立，所以

$$Ax_0 - \bar{\lambda}x_0 = 0.$$

对于不等于零的 x_0 来说这个等式既对复值 λ 不可能（否则自伴算子有复本征值）也对实值 λ 不可能$\Bigl($否则由 $\bar{\lambda} = \lambda$ 有

$$\|x_0\| \leqslant \frac{1}{c}\|Ax_0 - \lambda x_0\| = 0\Bigr).$$

最后再证 L 是闭的．设 $\{y_n\}\subset L, y_n = A_\lambda x_n$，且 $y_n \to y_0$．由 (1)

$$\|x_n - x_m\| \leqslant \frac{1}{c}\|A_\lambda x_n - A_\lambda x_m\| = \frac{1}{c}\|y_n - y_m\|.$$

序列 $\{y_n\}$ 自收敛，因此对 $n,m\to\infty$ 有 $\|y_n - y_m\|\to 0$．但这时 $\|x_n - x_m\|\to 0$ 对 $n, m\to\infty$．由空间H的完备性，可知序列 $\{x_n\}$ 的极限存在:

$$x = \lim_n x_n.$$

由此
$$A_\lambda x = \lim_n A_\lambda x_n = \lim_n y_n = y,$$

即 $y\in L$．

L 既然在 H 内稠又为闭集，所以 $L = H$．此处对应

$$y = A_\lambda x$$

又是一对一的，所以存在逆算子

$$x = A_\lambda^{-1} y = R_\lambda y$$

定义于全空间H上．不等式 (1) 给出

$$\|R_\lambda y\| = \|x\| \leqslant \frac{1}{c}\|A_\lambda x\| = \frac{1}{c}\|y\|,$$

即 R_λ 为有界算子且

$$\|R_\lambda\| \leqslant \frac{1}{c}.$$

推论 为使点 λ 属于自伴算子 A 的谱，必须且只须存在序列 $\{x_n\}$ 使

$$\|Ax_n - \lambda x_n\| \leqslant c_n\|x_n\|, c_n\to 0, n\to\infty. \tag{2}$$

在(2)中可令 $\|x_n\| = 1$，于是

$$\|Ax_n - \lambda x_n\|\to 0,\ \|x_n\| = 1. \tag{3}$$

定理 2 任一复数 $\lambda = \alpha + i\beta$，$\beta\neq 0$，均为自伴算子 A 的正则值．

事实上，若

$$y = A_\lambda x = Ax - \lambda x,$$

那么

$$(y, x) = (Ax, x) - \lambda(x, x),$$

$$(x, y) = \overline{(y, x)} = (Ax, x) - \bar{\lambda}(x, x).$$

由此

$$(x, y) - (y, x) = (\lambda - \bar{\lambda})(x, x) = 2i\beta\|x\|^2,$$

或

$$2|\beta|\|x\|^2 = |(x, y) - (y, x)| \leqslant |(x, y)| + |(y, x)| \leqslant 2\|y\|\|x\|.$$

这就是说

$$\|y\| \geqslant |\beta|\|x\|, \text{ 即 } \|A_\lambda x\| \geqslant |\beta|\|x\|. \tag{4}$$

为了完成定理的证明只须应用定理 1.

定理 3 自伴算子 A 的谱全含于闭区间 $[m, M]$，式中

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x), \quad M = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x).$$

由前述定理可知谱仅能含于实轴. 今证位于闭区间 $[m, M]$ 之外的实数为正则值.

例如设 $\lambda > M$，$\lambda = M + d$，$d > 0$. 我们有

$$(A_\lambda x, x) = (Ax, x) - \lambda(x, x) \leqslant M(x, x) - \lambda(x, x) = -d\|x\|^2,$$

由此

$$|(A_\lambda x, x)| \geqslant d\|x\|^2.$$

在另一方面，$|(A_\lambda x, x)| \leqslant \|A_\lambda x\|\|x\|$. 从而

$$\|A_\lambda x\| \geqslant d\|x\|.$$

这就证明了 λ 为正则值.

同理可以考虑 $\lambda < m$ 的情形.

定理 4 数 m 和 M 是属于谱的点.

我们不妨对点 M 来证明.

首先注意，如果把算子 A 换成 A_μ，那么谱向左平移 μ，且

M 和 m 依次换成 $M-\mu$ 及 $m-\mu$. 因此不失一般性可设 $0 \leqslant m \leqslant M$. 在此情形下 $M=\|A\|$ (见第七章 § 1). 我们证明 M 是谱的点.

事实上,由数 $M=\|A\|$ 的定义,存在元列 $\{x_n\}$, $\|x_n\|=1$ 使

$$(Ax_n, x_n) = M - \delta_n, \delta_n \to 0 \text{ 对 } n \to \infty.$$

此外,

$$\|Ax_n\| \leqslant \|A\|\|x_n\| = \|A\| = M.$$

因此

$$\begin{aligned}\|Ax_n - Mx_n\|^2 &= (Ax_n - Mx_n, Ax_n - Mx_n)\\ &= \|Ax_n\|^2 - 2M(Ax_n, x_n) + M^2\|x_n\|^2\\ &\leqslant M^2 - 2M(M-\delta_n) + M^2 = 2M\delta_n,\end{aligned}$$

或
$$\|Ax_n - Mx_n\| \leqslant \sqrt{2M\delta_n}.$$

由此
$$\|Ax_n - Mx_n\| \to 0 \quad \|x_n\| = 1.$$

再由定理 1 推论得所欲证.

推论 每一自伴算子均有非空谱[1].

例 1. 若 A 为单位算子 E, 那么它的谱仅含有一个本征值 1. 而且对应的本征元所成的空间 $H_1 = H$. 对 $\lambda \neq 1$, 算子 $R_\lambda = \dfrac{1}{\lambda - 1}$ 是有界算子.

例 2. 定义 $(L_2[0,1] \to L_2[0,1])$ 的算子 A 如下

$$Ax(t) = tx(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

显然 $m=0$, $M \leqslant 1$. 我们证明区间 $[0,1]$ 的所有点属于算子 A 的谱. (由此更可得 $M=1$).

事实上, 设 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. 考虑区间 $[\lambda, \lambda+\varepsilon]$ (或

---

1) 在 Banach 代数理论 [7] 中可以证明定义在任一 Banach 空间上的任一有界算子的谱均不空.

$[\lambda-\varepsilon,\lambda]$）并设它含于 $[0,1]$，令

$$x_\varepsilon(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & \text{对 } t\in[\lambda,\lambda+\varepsilon],\\ 0 & \text{对 } t\bar{\in}[\lambda,\lambda+\varepsilon].\end{cases}$$

因为

$$\int_0^1 x_\varepsilon^2(t)dt=\int_\lambda^{\lambda+\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}dt=1,$$

所以
$$x_\varepsilon(t)\in L_2[0,1],\ \|x_\varepsilon\|=1.$$

此外
$$A_\lambda x_\varepsilon(t)=(t-\lambda)x_\varepsilon(t),$$

由此

$$\|A_\lambda x_\varepsilon(t)\|^2=\frac{1}{\varepsilon}\int_\lambda^{\lambda+\varepsilon}(t-\lambda)^2dt=\frac{\varepsilon^2}{3}.$$

对 $\varepsilon\to0$ 我们有 $\|A_\lambda x_\varepsilon\|\to0$. 从而对 $0\leqslant\lambda\leqslant1$ 的 λ 是谱的点.

同时算子 A 没有本征值. 事实上,

$$A_\lambda x(t)=(t-\lambda)x(t).$$

如果 $A_\lambda x(t)=0$，那么 $(t-\lambda)x(t)=0$ 在 $[0,1]$ 殆遍成立，从而 $x(t)$ 殆遍为零.

不变子空间 空间 H 的子空间 L 称为算子 A 的不变子空间，如果 $x\in L$ 蕴含 $Ax\in L$. 我们举一个不变子空间的例子. 设 λ 是算子 A 的本征值，N_λ 是与此本征值相对应的本征元的全体再加上零元，那么 N_λ 是不变子空间，因为由等式 $Ax=\lambda x$，可知 $x\in N_\lambda$ 时 $Ax\in N_\lambda$.

如果 L 是算子 A 的不变子空间，我们也说 L 约化 A. 我们来证明自伴算子的不变子空间的某些性质.

1°. 由 L 的不变性可知它的正交余 $M=H\dot{-}L$ 的不变性.

设 $x\in M$. 这就是说 $(x,y)=0$ 对任一 $y\in L$. 但 Ay

属于L对 $y\in L$. 所以 $(x,Ay)=0$，从而由A的自伴性可得 $(Ax,y)=0$ 对任一 $y\in L$. 由此 $Ax\in M$. 得所欲证.

用G_λ代表算子A_λ的值域，即形如 $y=Ax-\lambda x$ 的所有元,式中λ为本征值.

容易验证 $H=\overline{G}_\lambda\dot{+}N_\lambda$. 事实上,如果 $y\in G_\lambda$, $u\in N_\lambda$, 那么

$$(y,u)=(Ax-\lambda x,u)=(x,Au-\lambda u)=(x,0)=0.$$

从而 $G_\lambda\perp N_\lambda$.若 $y\in\overline{G}_\lambda$ 且 $y\bar{\in}G_\lambda$, 那么 $y=\lim\limits_n y_n$, 式中 $y_n\in G_\lambda$. 由等式 $(y_n,u)=0$ 可得

$$(y,u)=\lim_n(y_n,u)=0.$$

从而 $\overline{G}_\lambda\perp N_\lambda$.

今设 $(y,u)=0$ 对任意 $y\in G_\lambda$. 对任一$x\in H$可得

$$0=(Ax-\lambda x,u)=(x,Au-\lambda u),$$

由此 $$Au-\lambda u=0 \text{ 即 } u\in N_\lambda.$$

随之 $$N_\lambda=H\dot{-}G_\lambda=H\dot{-}\overline{G}_\lambda,$$

这就是所要证明的.

由性质 10 以及刚才所证明的可知$\overline{G}_\lambda$是自伴算子A的不变子空间.

用N代表所有子空间N_λ的正交和,或算子A的所有本征元的闭线性包. 这也是给定的算子的不变子空间. 若H可分,那么在每一N_λ内可以构造本征元的有限系或可数完全规范正交系. 因不同的N_λ内的本征元相互正交,所以把这些系并起来，我们得出本征元 $\{x_n\}$ 的规范正交系，在空间N内完全.

算子A在不变子空间L内定义了一个 $(L\to L)$ 内算子 A_L，即是说，对 $x\in L$，$A_Lx=Ax$. 不难验证A_L也是自伴算子.

2° 若不变子空间L和M构成相互正交余，那么算子A的谱是算子A_L和A_M的谱的点集并.

设λ是算子A_L或A_M的谱的点，那么存在元$\{x_n\}\subset L$（相应地$\subset M$）使

$$\|x_n\| = 1 \quad \|A_{L,\lambda}x_n\| \to 0.$$

但$\|A_{L,\lambda}, x_n\| = \|A_\lambda x_n\|$，因此$\lambda$属于算子$A$的谱.

今设λ既不属于算子A_L的谱，也不属于算子A_M的谱.那么存在正数c使对任意$y\in L$和$z\in M$

$$\|A_\lambda y\| = \|A_{L,\lambda}y\| \geqslant c\|y\|, \ \|A_\lambda z\| \geqslant c\|z\|,$$

但任一元$x\in H$可以写成

$$x = y + z, \ y\in L, \ z\in M, \ \|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2.$$

由此

$$\|A_\lambda x\| = \|A_\lambda y + A_\lambda z\| = (\|A_\lambda y\|^2 + \|A_\lambda z\|^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$\geqslant c(\|y\|^2 + \|z\|^2)^{\frac{1}{2}} = c\|x\|.$$

所以λ不是谱的点.

点谱和连续谱 我们已经说过，空间H可以表为两个空间的正交和：空间N——自伴算子A的所有本征矢量的集的闭线性包——及其正交余. 空间N是算子A的不变子空间，这就是说，算子A的谱是算子A_N和A_G的谱的并. 算子A_N的谱称为算子A的点谱[1]. 算子A_G的谱称算子A的连续谱.若$N = H$，算子A称有具有纯点谱的. 若$H = G$，那么A的谱称纯连续的.

具有纯点谱的算子 设自伴算子A具有纯点谱. 于是$N = H$，从而在H内存在闭规范正交系的本征元$\{x_n\}$：

$$Ax_n = \lambda_n x_n{}^{2)}. \tag{5}$$

1) 算子A的点谱常指它的所有本征值的全体. 依照我们的定义，我们把本征值所成的集的聚点也归入点谱.

2) 自然设H是可分的.

每一元 $x\in H$ 可表为 Fourier 级数

$$x=\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \tag{6}$$

式中 $c_n=(x,x_n)$.

用P_n代表由下式定义的射影算子:

$$P_n x=(x,\ x_n)x_n=c_n x_n$$

(P_n是在直线 tx_n,$-\infty<t<+\infty$ 上的射影算子).

公式(6)可以写成

$$x=Ex=\sum_n P_n x$$

或者写成算子的形式

$$E=\sum_n P_n. \tag{7}$$

容易看出

$$P_n P_m=0,\ m\neq n. \tag{8}$$

由(5)和(6)

$$Ax=\sum_n \lambda_n c_n x_n=\sum_n \lambda_n P_n x \tag{9}$$

(因为 $|\lambda|\leqslant\|A\|$, 所以和 $\sum\limits_n(\lambda_n c_n)^2$ 随 Σc_n^2 的有限而有限).

写成算子的形式(9)式为

$$A=\sum_n \lambda_n P_n. \tag{10}$$

由(9)和(6)可得

$$(Ax,\ x)=\sum_n \lambda_n c_n^2. \tag{11}$$

这就是说,我们还原二次型 (Ax,x) 为平方和.

公式(11)也可以写成

$$(Ax,x)=\sum_n \lambda_n(P_n x,x). \tag{12}$$

今设 λ 不含于本征值的集 $\{x_n\}$ 的闭包. 那么存在常数 $d>0$ 使 $|\lambda-\lambda_n|>d$. 我们有

$$A_\lambda x=(A-\lambda E)x=\sum_n(\lambda_n-\lambda)P_n x.$$

由此再据(8)可得

$$R_\lambda x=A_\lambda^{-1}x=\sum_n \frac{1}{\lambda_n-\lambda}P_n x, \tag{13}$$

或者由于 $P_n x=c_n x_n$,

$$R_\lambda x=\sum_n \frac{c_n}{\lambda_n-\lambda}x_n.$$

因为

$$\left|\frac{c_n}{\lambda_n-\lambda}\right|\leqslant\frac{|c_n|}{d},$$

所以

$$\|R_\lambda x\|\leqslant\frac{1}{d}\left(\sum_n c_n^2\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{d}\|x\|,$$

或

$$\|R_\lambda\|\leqslant\frac{1}{d}.$$

从而 λ 不属于谱. 我们可以把(13)写成

$$R_\lambda=\sum\frac{1}{\lambda_n-\lambda}P_n. \tag{14}$$

我们这样推导出来的公式完全类似于 n 维空间的二次型和对称(埃米)矩阵的公式，不同之处仅在于把有限和换成无穷级数.

D. Hilbert 在他的工作 [8] 中第一个发展了自伴算子和对应的二次型 (Ax, x) 的理论，而把后者看作 n 个变元的二次型当 $n \to \infty$ 时的极限．当 n 无限增大时．有限和既可如以上的论述成为无限和，也可以成为有如下述的积分表达式．这对应于出现点谱和连续谱．讨论过的纯点谱的情形由于它类似于有限和的情形而特别简单．在同一工作中，Hilbert 引入了一类具有纯点谱的算子——重要的全连续算子类．现在我们在此推导与第六章一般结果相独立的有关全连续算子的谱的离散性的证明．

定理 5 自伴全连续算子 A 的谱中凡异于零的点均为其本征值．

设 $\lambda \neq 0$ 是算子 A 的谱的点，那么存在元列 $\{x_n\} \subset H$ 使

$$\|x_n\| = 1, \ \|Ax_n - \lambda x_n\| \to 0.$$

或者令 $Ax_n - \lambda x_n = y_n$，$\|y_n\| \to 0$，我们有

$$x_n = \frac{1}{\lambda}(Ax_n - y_n).$$

算子 A 变序列 $\{x_n\}$ 于紧序列 $\{Ax_n\}$． 因此存在收敛子序列 $\{Ax_{n_k}\}$，随之子序列

$$x_{n_k} = \frac{1}{\lambda}(Ax_{n_k} - y_{n_k}) \tag{15}$$

也收敛．令 $x_{n_k} \to x$． 那么 $Ax_{n_k} \to Ax$，此外 $y_{n_k} \to 0$，所以由(15)可得

$$x = \frac{1}{\lambda}Ax, \quad 或 \ Ax = \lambda x.$$

这时，由

$$\|x\| = \lim_n \|x_n\| = 1,$$

所以 x 是本征元，而 λ 则为对应的本征值．

推论 1 每一自伴全连续算子至少有一本征值.

这个结论可由刚才证明的定理和定理 4 的推论得出.

推论 2 自伴全连续算子 A 的每一非零不变子空间 L 含有它的本征元.

事实上，随着 A 算子 $A_L \in (L \to L)$ 也全连续. 这个算子由推论 1 具有本征值 λ. 从而在 L 内存在算子 A_L 的本征元，而它也是算子 A 的本征元.

推论 3 自伴全连续算子具有纯点谱.

事实上，与所有本征元正交的不变子空间 G 为零. 因为在相反情形下，由推论 2 它将含有本征元，这与它的定义相矛盾.

定理 6 自伴全连续算子 A 的本征值的集可能仅以 $\lambda = 0$ 为聚点.

这个定理是第六章 § 2 定理 7 的特例. 但我们可以给它以一个简单的独立证明.

事实上，如果存在不同本征值的无穷序列 $\{\lambda_n\}$ 使 $|\lambda_n| \geqslant c > 0$，那么对应的本征元 x_n，$\|x_n\| = 1$，由其正交性将有

$$\begin{aligned}\|Ax_n - Ax_m\|^2 &= \|\lambda_n x_n - \lambda_m x_m\|^2 \\ &= \lambda_n^2 + \lambda_m^2 \geqslant 2c^2\end{aligned}$$

式中 $n \neq m$. 但在这样情形下序列 $\{Ax_n\}$ 不是紧的，这与 A 的全连续性相矛盾.

§ 5 自伴算子的谱分解

单位分解 现在我们把 § 4 公式 (7), (10) (14) 推广到任一自伴算子.

引理 设 A 和 B 为可换自伴算子且 $A^2 = B^2$. 令 P 代表

在算子 $A-B$ 的零子空间上的射影算子，那么

1）与 $A-B$ 可换的每一有界线性算子 C 与 P 可换，

2）由 $Ax=0$ 可得 $Px=x$，

3）$A=(2P-E)B$.

设 L 是算子 $A-B$ 的零子空间，且设 P 是在这个子空间上的射影．若 $y\in L$ 且 C 与 $A-B$ 可换，那么 Cy 也属于 L，这是因为

$$(A-B)Cy=C(A-B)y=0.$$

因此对任一 $x\in H$ 有 $CPx\in L$，从而

$$PCPx=CPx,$$

即
$$PCP=CP.$$

同理
$$C^*P=PC^*P,$$

由此
$$PC=(C^*P)^*=(PC^*P)^*=PCP.$$

从而 $CP=PC$，这就证明了 1）

今设 $Ax=0$．于是

$$\|Bx\|^2=(Bx,Bx)=(B^2x,x)=(A^2x,x)$$
$$=\|Ax\|^2=0,$$

即 $Bx=0$．因此

$$(A-B)x=0,$$

从而
$$Px=x,$$

所以（2）也得证．

最后，

$$(A-B)(A+B)=A^2-B^2=0.$$

因此对任一 x

$$(A+B)x\in L,$$

从而

$$P(A+B)x=(A+B)x,$$

即
$$P(A+B)=A+B.$$

又因 $P(A-B)=(A-B)P=0$，所以

$$P(A+B)-P(A-B)=A+B,$$

由此

$$A=(2P-E)B.$$

引理全部证完.

定理 1 对每一自伴算子A存在射影算子E_+使

1) 凡与A可换的有界线性算子C与E_+可换，

2) $AE_+\geqslant 0, A(E-E_+)\leqslant 0$,

3) 若 $Ax=0$，则 $E_+x=x$.

设E_+为射影算子，映整个H于算子$A-B$的零子空间上，式中B是A^2的正平方根. 由引理立刻可知 1) 和 3) 被满足，特别 $AE_+=E_+A$ 且 $BE_+=E_+B$. 又由同一引理有

$$A=(2E_+-E)B.$$

从而

$$AE_+=BE_+\geqslant 0,\ A(E-E_+)=-(E-E_+)B\leqslant 0,$$

这是因为两个可换正算子的积也是正算子. 定理 1 证毕.

我们注意，由等式 $A=(2E_+-E)B$ 可得

$$BE_+=\frac{1}{2}(A+B),$$

由此

$$AE_+=\frac{1}{2}(A+B),$$

$$A(E-E_+)=\frac{1}{2}(A-B).$$

算子AE_+记作A_+称为算子A的正部分，算子 $A(E-E_+)$记作A_-称为算子A的负部分，这时有

$$A=A_++A_-.$$

例 1. 设A是n维对称矩阵具有本征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$,

式中 $\lambda_1, \lambda_{2}, \cdots, \lambda_k < 0$, $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2} \cdots, \lambda_n > 0$. 由线性代数可知 A 保范等价于对角矩阵

$$(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k, \lambda_{k+1} \cdots, \lambda_n) = \left\| \begin{matrix} \lambda_1, 0, 0, \cdots, 0 \\ 0 \quad \lambda_2 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad \lambda_n \end{matrix} \right\|$$

即 $$A = U(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k, \lambda_{k+1}, \cdots, \lambda_n)U^{-1},$$

由此 $$A_+ = U(0, 0, \cdots, 0, \lambda_{k+1}, \cdots \lambda_n)U^{-1},$$

$$A_- = U(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k, 0 \cdots 0)U^{-1}.$$

例 2. 设 A 是 $L_2[-1, +1]$ 内由等式

$$Ax(t) = tx(t)$$

定义的算子. 于是

$$A_+x(t) = \frac{t_+(t)}{2}x(t), \quad A_-x(t) = \frac{t_-(t)}{2}x(t).$$

定理 2 每一自伴算子 A 总产生一个依赖于实参数 λ, $-\infty < \lambda < +\infty$ 的射影算子族 $\{E_\lambda\}$ 且满足如下条件:

1) 由 $AC = CA$ 可得 $E_\lambda C = CE_\lambda$ 对任一 λ,

2) $E_\lambda \leqslant E_\mu$, 如果 $\lambda \leqslant \mu$,

3) E_λ 强左连续, 即 $E_{\lambda-0} = E_\lambda$,

4) $E_\lambda = 0$ 对 $-\infty < \lambda \leqslant m, E_\lambda = E$ 对 $M < \lambda < +\infty$,

式中 m 和 M 依次为算子 A 的下界和上界.

算子族 $\{E_\lambda\}$ 称为由算子 A 所产生的单位分解.

证明之前先举两个例子.

例 1. 设 A 是 n 阶对称矩阵

$$A = U(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)U^{-1},$$

式中 $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$. 设 e_i 是对应于本征值 λ_i 的本征矢量. 于是对 $\lambda_i < \lambda \leqslant \lambda_{i+1}$, 算子 E_λ 是在由 $e_1, e_2, \cdots, e_i$ 所产生的 i 维子空间上的射影算子. 对 $\lambda < \lambda_1$ 有 $E_\lambda = 0$,

对 $\lambda > \lambda_n$ 有 $E_\lambda = E$.

例 2. 设 $L_2[-1,1]$ 内算子 A 由下式给定

$$Ax(t) = tx(t).$$

于是$E_\lambda x(t)=\varphi_\lambda(t)x(t)$,其中 $\varphi_\lambda(t) = 0$ 对 $t > \lambda, \varphi_\lambda(t) = 1$ 对 $t \leqslant \lambda$.显然对 $\lambda<-1$ 有 $E_\lambda = 0$ 且对 $\lambda > 1$ 有 $E_\lambda = E$.

现在我们回到定理的证明. 设 λ 为任一实数且设 $A_\lambda = A - \lambda E$. 令 E_λ 代表射影算子 $E - E_+(\lambda)$, 其中 $E_+(\lambda)$ 是依定理 1 对算子 $A - \lambda E$ 构造的射影算子.

条件 1)显然满足,特别地,由此可知对任意 λ 和 μ,E_λ 和 E_μ 可换.

我们来考虑条件 2). 为此来看射影算子

$$P = E_\lambda(E - E_\mu),$$

其中 $\lambda < u$. 我们有

$$E_\lambda P = E_\lambda^2(E - E_\mu) = E_\lambda(E - E_\mu) = P \tag{1}$$

同理

$$(E - E_\mu)P = P \tag{2}$$

此外依 E_λ 的定义我们有

$$(A - \lambda E)E_\lambda \leqslant 0 \tag{3}$$

$$(A - \mu E)(E - E_\mu) \geqslant 0. \tag{4}$$

对任意 $x \in H$ 令 $Px = y$ 由(1)和(2)我们有

$$E_\lambda y = E_\lambda Px = Px = y,$$

同理

$$(E - E_\mu)y = y.$$

由(3)和(4)

$$((A - \lambda E)y, y) = ((A - \lambda E)E_\lambda y, y) \leqslant 0,$$

$$((A - \mu E)y, y) = ((A - \mu E)(E - E_\mu)y, y) \geqslant 0.$$

由第一等式减去第二等式得

$$((\mu - \lambda)y, y) \leqslant 0,$$

或

$$(\mu - \lambda)\|y\|^2 \leqslant 0$$

由此再注意到 $\lambda < \mu$ 可以肯定 $y = Px = 0$, 而 x 为H任一

元. 从而$P=0$, 或

$$E_\lambda(E-E_\mu)=E_\lambda-E_\lambda E_\mu=0$$

这就证明了条件 2) 被满足.

考虑数直线上半开区间 $\Delta=[\lambda,\mu)$, 对射影算子 $E(\Delta)=E_\mu-E_\lambda$ 我们有

$$E_\mu E(\Delta)=E(\Delta),$$
$$(E-E_\lambda)E(\Delta)=E(\Delta).$$

因之

$$(A-\mu E)E(\Delta)=(A-\mu E)E_\mu E(\Delta)\leqslant 0,$$
$$(A-\lambda E)E(\Delta)=(A-\lambda E)(E-E_\lambda)E(\Delta)\geqslant 0,$$

从而

$$\lambda E(\Delta)\leqslant AE(\Delta)\leqslant \mu E(\Delta). \tag{5}$$

现在我们回到条件 3). 对任意 $x\in H$, 表达式 $(E_\lambda x,x)$ 是 λ 的非减函数. 因此 $\lim\limits_{\lambda\to\mu-0}(E_\lambda x,x)$ 存在. 由此得

$$\|E_\nu x-E_\lambda x\|^2=((E_\nu-E_\mu)x,x)$$
$$=(E_\nu x,x)-(E_\lambda x,x)\to 0$$

对 $\lambda<\nu<\mu$ 和 $\lambda,\nu\to\mu$. 从而对任意 $x\in H$ 存在

$$\lim_{\lambda\to\mu-0}E_\lambda x=E_{\mu-0}x.$$

容易验证 $E_{\mu-0}$ 是射影算子. 我们来证明

$$E_{\mu-0}=E_\mu.$$

令

$$E(\Delta_0)=E_\mu-E_{\mu-0}.$$

我们有

$$E(\Delta)=E_\mu-E_\lambda\to E(\Delta_0)\ \text{对}\ \lambda\to\mu-0.$$

上式在按点收敛意义下成立. 在不等式(5)中取极限,这显然是可能的,可得

$$\mu E(\Delta_0)=AE(\Delta_0).$$

今设x为H任一元,且令 $y=E(\Delta_0)x$. 由前面等式我们有

$$(A - \mu E)y = 0,$$

由此据定理 1 条件 3) 可得 $E_\mu y = 0$. 此外

$$E_\mu E(\Delta) = E(\Delta),$$

由此取极限可得

$$E_\mu E(\Delta_0) = E(\Delta_0).$$

从而 $$E(\Delta_0)x = E_\mu E(\Delta_0)x = E_\mu y = 0.$$

因为 x 是 H 任一元，这就是说 $E(\Delta_0) = 0$. 从而条件 3) 被满足.[1]

证明条件 4) 被满足是没有什么困难的. 设 $\lambda < m$ 且 $E_\lambda \neq 0$. 那么存在这样 x 使 $E_\lambda x \neq 0$. 令 $E_\lambda x = y$, 我们有 $E_\lambda y = y$, 而且可设 $\|y\| = 1$. 由此

$$(Ay, y) - \lambda = (Ay, y) - \lambda(y, y) = ((A - \lambda E)y, y)$$
$$= ((A - \lambda E)E_\lambda y, y) \leqslant 0$$

即

$$(Ay, y) \leqslant \lambda < m,$$

而这与数 m 的定义相矛盾. 从而 $E_\lambda = 0$ 对 $\lambda < m$. 由左连续性也有 $E_m = 0$. 同理可证 $E_\lambda = E$ 对 $\lambda > M$.

自伴算子谱分解

定理 3 等式

$$A = \int_m^{M+\varepsilon} \lambda dE_\lambda \tag{6}$$

成立. 式中积分理解为积分和在算子空间内一致收敛意义下的极限，而 ε 则为任意正数.

设半开区间 $[m, M + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ 被分割为半开区间 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n, \Delta_k = [\lambda_k, \mu_k)$. 对每一半开区间 Δ_k 由 (5) 我

---

1) 依 E_λ 的定义，算子 $A - \lambda E$ 的零元属于子空间 LE_λ 的正交余. 如果 E_λ 这样定义使算子 $A - \lambda E$ 的零元含于 LE_λ, 我们可以这样做不影响性质 1), 2) 和 4), 那么 E_λ 将右连续.

们有

$$\lambda_k E(\Delta_k) \leqslant AE(\Delta_k) \leqslant \mu_k E(\Delta_k).$$

对所有 $k=1, 2, \cdots, n$ 求和并注意

$$\sum_{k=1}^{n} E(\Delta_k) = E,$$

可得

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k E(\Delta_k) \leqslant A \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu_k E(\Delta_k).$$

设 ν_k 为 $[\lambda_k, \mu_k)$ 内某一数，则

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \nu_k) E(\Delta_k) \leqslant A - \sum_{k=1}^{n} \nu_k E(\Delta_k)$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} (\mu_k - \nu_k) E(\Delta_k).$$

令 $\max\limits_{k} (\mu_k - \lambda_k) = \delta$，则由这些不等式可得

$$-\delta E \leqslant A - \sum_{k=1}^{n} \nu_k E(\Delta_k) \leqslant \delta E.$$

即

$$-\delta(x,x) \leqslant \left(\left(A - \sum_{k=1}^{n} \nu_k E(\Delta_k)\right) x, x\right)$$
$$\leqslant \delta(x,x).$$

由此可得

$$\left\| A - \sum_{k=1}^{n} \nu_k E(\Delta_k) \right\| \leqslant \delta,$$

即

$$A = \lim_{\delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} \nu_k E(\Delta_k) = \int_{m}^{M+\varepsilon} \lambda dE_\lambda.$$

这就是所要证明的。对于全连续算子这个公式还原成 § 4 公式(10)。

注. 因为算子序列 $\{A_n\}$ 如果在算子空间内一致收敛意义下趋近于算子 A，那么 $\{A_n\}$ 也按点收敛于 A。而且二次型 $(A_n x, x)$ 也收敛于二次型 (Ax, x). 由此据定理 3 可得

1) $Ax = \lim \sum_{k=1}^{n} \nu_k E(\Delta_k)x = \int_m^{M+\varepsilon} \lambda dE_\lambda x$,

2) 对任意 $x \in H$,

$$(Ax, x) = \lim \sum_{k=1}^{n} \nu_k (E(\Delta_k)x, x)$$

$$= \int_m^{M+\varepsilon} \lambda d(E_\lambda x, x).$$

算子函数，预解算子，谱. $F(A)$ 的定义. 现在我们定义形如

$$\int_m^{M+\varepsilon} F(\lambda) dE_\lambda$$

的积分，式中 $F(\lambda)$ 为 $[m, M]$ 上任一复值阶段函数，而$\{E_\lambda\}$则是由自伴算子 A 所产生的单位分解。如果 λ_0 为此函数的间断点，我们规定

$$F(\lambda_0) = F(\lambda_0 + 0).$$

扩张 $F(\lambda)$ 于半开区间 $[m, M+\varepsilon)$ 而令 $F(\lambda) = F(M)$. 设在 $\Delta_k = [\lambda_k, \mu_k)$, $k = 1, 2, \cdots, n$ 上令 $F(\lambda_k) = \nu_k$ 且设

$$\bigcup_{k=1}^{n} \Delta_k = [m, M+\varepsilon).$$

依定义令

$$\int_m^{M+\varepsilon} F(\lambda) dE_\lambda = \sum_{k=1}^{n} \nu_k E(\Delta_k).$$

容易看出，我们也有等式

$$\int_m^{M+\varepsilon} F(\lambda)dE_\lambda = \sum_{k=1}^{p} \tilde{\nu}_k E(\tilde{\Delta}_k),$$

式中 $\tilde{\Delta}_k$ 为任一部分半开区间而在其上 $F(\lambda)$ 为常值，而且这些区间的并为 $[m, M+\varepsilon)$. 算子 $\int_m^{M+\varepsilon} F(\lambda)dE_\lambda$ 记作 $F(A)$ 并称它为与实变函数 $F(\lambda)$ 相对应的**算子 A 的函数**. 由此我们得出实变函数的阶段函数与算子 A 的函数之间的对应.

这个对应具有以下性质:

1) 若

$$F(\lambda) = \alpha F_1(\lambda) + \beta F_2(\lambda),$$

则

$$F(A) = \alpha F_1(A) + \beta F_2(A)$$

(对应的加法性).

2) 若

$$F(\lambda) = F_1(\lambda)F_2(\lambda),$$

则

$$F(A) = F_1(A)F_2(A),$$

(对应的乘法性).

3) $\bar{F}(A) = [F(A)]^*$, 式中函数上的一横记号代表取复值共轭函数.

4) $\|F(A)\| \leqslant \max|F(\lambda)|$.

5) 对满足 $AB = BA$ 的任意有界线性算子 B 有 $F(A)B = BF(A)$.

为了证明性质 1) 和 2), 分割半开区间 $[m, M+\varepsilon)$ 为部分 Δ_k, 在其上两个函数 $F_1(\lambda)$ 和 $F_2(\lambda)$ 均为常值, 那么对

$$F(\lambda) = \alpha F_1(\lambda) + \beta F_2(\lambda)$$

我们有

$$F(A) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha c_k^{(1)} + \beta c_k^{(2)})E(\Delta_k)$$

$$= \alpha \sum_{k=1}^{n} c_k^{(1)} E(\Delta_k) + \beta \sum_{k=1}^{n} c_k^{(2)} E(\Delta_k)$$

$$= \alpha F_1(A) + \beta F_2(A).$$

又对 $F(\lambda) = F_1(\lambda) F_2(\lambda)$，由 $k \neq l$ 时 $E(\Delta_k)$和 $E(\Delta_l)$正交我们有

$$F(A) = \sum_{k=1}^{n} c_k^{(1)} c_k^{(2)} E(\Delta_k)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} c_k^{(1)} E(\Delta_k) \right) \left(\sum_{l=1}^{n} c_l^{(2)} E(\Delta_0) \right)$$

$$= F_1(A) F_2(A).$$

此外

$$(F(A)x, y) = \left(\sum_{k=1}^{n} c_k E(\Delta_k) x, \, y \right)$$

$$= \left(x, \sum_{k=1}^{n} \bar{c}_k E(\Delta_k) y \right)$$

$$= (x, \bar{F}(A) y),$$

由此

$$[F(A)]^* = \bar{F}(A).$$

最后由

$$|(F(A)x, x)| = \left| \left(\sum_{k=1}^{n} c_k E(\Delta_k) x, \, x \right) \right|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} |c_k| (E(\Delta_k) x, x)$$

$$\leqslant \max |F(\lambda)| (x, x),$$

可得

$$\|F(A)\| = \sup_{\|x\|=1} |(F(A)x, x)| \leqslant \max |F(\lambda)|.$$

性质 5) 是显然的.

由 $F(A)$ 的定义可知 $E(\Delta)=x_\Delta(A)$，其中 $x_\Delta(\lambda)$ 是半开区间△的特征函数，令设 $F(\lambda)$ 为 $[m,M]$ 上任一连续函数. 扩张它于半开区间$[m,M+\varepsilon)$而令 $F(\lambda)=F(M)$ 对 $\lambda\in(M,M+\varepsilon)$.存在阶段函数序列 $F_n(\lambda)$ 在$[m,M+\varepsilon)$上一致收敛于 $F(\lambda)$. 考虑对应的算子函数 $F_n(A)$ 我们有

$$\|F_m(A)-F_n(A)\|\leqslant\max|F_m(\lambda)-F_n(\lambda)|\to 0$$

对 $n,m\to\infty$. 由算子空间的完备性存在算子

$$B=\lim_n F_n(A).$$

依定义令

$$B=\int_m^{M+\varepsilon}F(\lambda)dE_\lambda.$$

以后我们仍用 $F(A)$ 代表 B 并称它为与实变数 λ 的连续函数 $F(\lambda)$ 相对应的算子 A 的函数. 不难验证 $F(A)$ 的定义不依赖于收敛于 $F(\lambda)$ 的序列 $\{F_n(\lambda)\}$ 的选取,而且性质 1)—5)对连续函数也成立. 特别我们有

$$A^n=\int_m^{M+\varepsilon}\lambda^n dE_\lambda\quad n=0,1,2,\cdots.$$

预解算子 在实变函数与算子函数之间的对应可以广泛地应用来解释自伴算子的一系列性质，特别是它的谱性质. 现在我们仅限于下述三个定理.

定理 4 为了对给定的 λ_0 存在预解算子

$$R_{\lambda_0}=(A-\lambda_0E)^{-1},$$

只须满足下述三条件之一:

1) λ_0 非实数,

2) λ_0 在闭区间 $[m,M]$ 之外,

3) 如果 $\lambda_0\in[m,M]$, 那么存在半开区间 $[\alpha,\beta)$, $\alpha<\lambda_0<\beta$ 使在其内 E_λ 取常值.

在所有情形下

$$R_{\lambda_0}=\int_m^{M+\varepsilon}\frac{dE_\lambda}{\lambda-\lambda_0}.$$

事实上，在前两个情形下，函数

$$f(\lambda)=\frac{1}{\lambda-\lambda_0}$$

对任意小的 ε 在 $[m, M+\varepsilon)$ 内连续. 因此

$$\int_m^{M+\varepsilon}\frac{dE_\lambda}{\lambda-\lambda_0}\int_m^{M+\varepsilon}(\lambda-\lambda_0)dE_\lambda=\int_m^{M+\varepsilon}dE_\lambda=E,$$

而且因为

$$\int_m^{M+\varepsilon}(\lambda-\lambda_0)dE_\lambda=A-\lambda_0E,$$

所以
$$\int_m^{M+\varepsilon}\frac{dE_\lambda}{\lambda-\lambda_0}=R_{\lambda_0}.$$

在第三情形下，分割半开区间 $[m, M+\varepsilon)$ 为三个半开区间 $[m, \alpha)$, $[\alpha, \beta)$ 和 $[\beta, M+\varepsilon)$. 设在 $[m, \alpha)$ 和 $[\beta, M+\varepsilon)$ 内令 $\varphi(\lambda)=\dfrac{1}{\lambda-\lambda_0}$, 再设 $\varphi(\lambda)$ 在 $[\alpha, \beta)$ 内为线性的且 $\varphi(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha-\lambda_0}$, $\varphi(\beta)=\dfrac{1}{\beta-\lambda_0}$.

由于在 $[\alpha, \beta)$ 内 E_λ 取常值，所以

$$\int_\alpha^\beta\phi(\lambda)dE_\lambda=0$$

对任意函数 $\phi(\lambda)$ 成立，因此可以写

$$\int_m^{M+\varepsilon}\varphi(\lambda)dE_\lambda=\int_m^{M+\varepsilon}\frac{dE_\lambda}{\lambda-\lambda_0}.$$

从而

$$\int_m^{M+\varepsilon}\frac{dE_\lambda}{\lambda-\lambda_0}\int_m^{M+\varepsilon}(\lambda-\lambda_0)dE_\lambda=E.$$

由此得知 R_{λ_0} 存在且等于

$$\int_m^{M+\varepsilon} \frac{dE_\lambda}{\lambda - \lambda_0}.$$

定理 5 如果对实数 λ_0 存在 R_{λ_0}, 那么 λ_0 含于某一半开区间 $[\alpha, \beta)$, $\lambda_0 \neq \alpha$ 的内部,而在其内 E_λ 取常值.

对任一 $x \in H$ 取等式

$$(A - \lambda_0 E)x = \int_m^{M+\varepsilon} (\lambda - \lambda_0) dE_\lambda x.$$

并在其两端以算子 $R_{\lambda_0} E(\Delta)$ 作用,其中 $\Delta = [\alpha, \beta)$ 代表某一半开区间而含 λ_0 于其内部. 我们得

$$E(\Delta)x = R_{\lambda_0}\left(\int_\alpha^\beta (\lambda - \lambda_0) dE_\lambda x \right).$$

由此

$$\|E(\Delta)x\| \leqslant \|R_{\lambda_0}\| \left\| \int_\alpha^\beta (\lambda - \lambda_0) dE_\lambda x \right\|.$$

但易证

$$\left\| \int_\alpha^\beta (\lambda - \lambda_0) dE_\lambda x \right\| \leqslant c \|E(\Delta)x\|,$$

式中 $c = \max(\beta - \lambda_0, \lambda_0 - \alpha)$. 从而

$$\|E(\Delta)x\| \leqslant c \|R_{\lambda_0}\| \|E(\Delta)x\|.$$

今取半开区间$[\alpha, \beta)$充分小使 $c\|R_{\lambda_0}\| \leqslant \frac{1}{2}$ 由此我们得

$$\|E(\Delta)x\| \leqslant \frac{1}{2} \|E(\Delta)x\|.$$

但这式只有 $E(\Delta)x = 0$ 才可能. 既然 x 为H任一元, 所以 $E(\Delta) = 0$. 由此更有 $E(\tilde{\Delta}) = 0$ 对任一半开区间 $\tilde{\Delta} \subset \Delta$. 这就是说 E_λ 在 $[\alpha, \beta)$ 内为常值.

由定理 4 立刻得出自伴算子A的正则点的集为开集, 从而自伴算子A的谱是位置在实直线上闭集(实 Banach 空间内

任意有界线性算子的谱的闭性已在第三章证明).

自伴算子的本征值

定理 6 为使 λ_0 为自伴算子 A 的本征值,必须且只须 λ_0 是 E_λ 的间断点.

必要性. 设对某一 $x_0 \neq 0$

$$Ax_0 - \lambda_0 x_0 = 0.$$

于是

$$((A - \lambda_0 E)^2 x_0, x_0) = 0.$$

从而

$$\int_m^{M+\varepsilon} (\lambda - \lambda_0)^2 d(E_\lambda x_0, x_0) = 0.$$

因为被积函数非负且 $(E_\lambda x_0, x_0)$ 单调增加,所以

$$\int_\alpha^\beta (\lambda - \lambda_0)^2 d(E_\lambda x_0, x_0) = 0$$

对任一半开区间 $[\alpha, \beta)$ 成立. 特别对任一 $\varepsilon > 0$

$$\int_{\lambda_0+\varepsilon}^{M+\varepsilon} (\lambda - \lambda_0)^2 d(E_\lambda x_0, x_0) = 0,$$

而且因为在积分区间上 $(\lambda - \lambda_0)^2 \geqslant \varepsilon^2$, 所以也有

$$\varepsilon^2 \int_{\lambda_0+\varepsilon}^{M+\varepsilon} d(E_\lambda x_0, x_0) = \varepsilon^2[(x_0, x_0) - (E_{\lambda_0+\varepsilon} x_0, x_0)] = 0.$$

由此

$$(x_0, x_0) - (E_{\lambda_0+\varepsilon} x_0, x_0) = 0$$

即

$$E_{\lambda_0+\varepsilon} x_0 = x_0. \tag{7}$$

同理

$$\int_m^{\lambda_0-\varepsilon} (\lambda - \lambda_0)^2 d(E_\lambda x_0, x_0) = 0,$$

由此再考虑到 $E_m = 0$ 可得

$$E_{\lambda_0-\varepsilon} x_0 = 0 \tag{8}$$

由(7)和(8)有

$$(E_{\lambda_0+\varepsilon} - E_{\lambda_0-\varepsilon}) x_0 = x_0.$$

再由 ε 的任意性可知

$$(E_{\lambda_0+0}-E_{\lambda_0})x_0=x_0$$

从而 λ_0 确为 E_λ 的间断点，而且本征元 x_0 属于与射影算子 $E_{\lambda_0+0}-E_{\lambda_0}$ 对应的子空间.

充分性. 设 $E_{\lambda_0+0}\neq E_{\lambda_0}$. 且设 x_0 属于射影算子 $E_{\lambda_0+0}-E_{\lambda_0}$ 对应的子空间，于是

$$(E_{\lambda_0+0}-E_{\lambda_0})x_0=x_0.$$

即 x_0 属于空间 $L^{E_{\lambda_0}}$ 在空间 $L_{E_{\lambda_0+0}}$ 内的正交余. 因此

$$E_{\lambda_0+0}x_0=x_0,\ E_{\lambda_0}x_0=0.$$

由此更有

$$E_\lambda x_0=x_0 \text{ 对 } \lambda>\lambda_0$$

从而

$$E(\Delta)x_0=x_0$$

对 $\Delta=[\lambda_0,\lambda_0+\varepsilon)$

但这时

$$Ax_0=AE(\Delta)x_0=\int_{\lambda_0}^{\lambda_0+\varepsilon}\lambda dE_\lambda x_0,$$

$$\lambda_0x_0=\lambda_0E(\Delta)x_0=\int_{\lambda_0}^{\lambda_0+\varepsilon}\lambda_0 dE_\lambda x_0,$$

由此

$$Ax_0-\lambda_0x_0=\int_{\lambda_0}^{\lambda_0+\varepsilon}(\lambda-\lambda_0)dE_\lambda x_0.$$

从而

$$\|Ax_0-\lambda_0x_0\|\leqslant\varepsilon\|E(\Delta)x_0\|\leqslant\varepsilon\|x_0\|,$$

而且因为 ε 是任意的，所以

$$\|Ax_0-\lambda_0x_0\|=0.$$

我们也顺便看到，算子 $E_{\lambda_0+0}-E_{\lambda_0}$ 射影于其上的整个子空间由算子 A 的对应于本征值 λ_0 的所有本征元所组成.

§6 无界算子、定义与基本概念

在以前的几节中我们考虑的是定义在整个 Hilbert 空间 H 上的线性有界算子．然而有许多非常重要的线性算子就不满足这些条件．例如微分算子

$$A=\frac{d}{dt}$$

就是这样的情形，它仅定义在有导数且导数平方可和的这样一个在 $L_2[-\pi,\pi]$ 内稠密的函数集上． 而且微分算子在这个集上无界．因为对函数 $x_n(t)=\sin nt$ 我们有

$$\|Ax_n\|=n\|x_n\|.$$

如果算子 A 定义在 H 内稠密的集上且有界的话，那么 A 在此集上当然连续，从而它可以依连续性唯一地扩张到整个空间上．

对某一类算子有上述反定理成立．

定理 1 如果线性算子 A 定义在整个空间 H，而且对 H 内所有 x 和 y 有等式 $(Ax,y)=(x,Ay)$ 成立，那么 A 有界从而连续．

如果不然，那么存在序列 $\{x_n\}\subset H$ 使

$$\|x_n\|=1 \text{ 且 } \|Ax_n\|\to\infty. \tag{1}$$

我们考虑泛函

$$f_n(x)=(Ax,x_n)=(x,Ax_n).$$

它是可加且齐性的．此外

$$|f_n(x)|=|(Ax,x_n)|\leqslant\|Ax\|\|x_n\|=\|Ax\|=c_x.$$

由 Banach-Steinhaus 定理，这些泛函的范数依全体有界：$\|f_n\|\leqslant c$．但 $\|f_n\|=\|Ax_n\|$，由此 $\|Ax_n\|\leqslant c$． 而由(1)这是不

可能的．由这一矛盾定理得证*)．

以后我们将讨论定义在一个在 H 内稠密的线性流形 $D(A)\subset H$ 上的算子 A 且设其值域也含于同空间，之外也设它在 $D(A)$ 为线性的，即对任意 $x,y\in D(A)$ 和任意数 α,β 有

$$A(\alpha x+\beta y)=\alpha Ax+\beta Ay.$$

集 $D(A)$ 称为算子 A 的定义域、集 $R(A)=AD(A)$ 称为算子 A 的值域．两个算子的 A 和 B 称为相等的，如果 $D(A)=D(B)$ 且 $Ax=Bx$ 对任一 $x\in D(A)$．算子 B 称为算子 A 的扩张，且 A 称为 B 的限制，如果 $D(A)\subset D(B)$ 且 $Ax=Bx$ 对任一 $x\in D(A)$，这时我们记成 $A\subset B$．

设 A 和 B 是两个线性算子依次以 $D(A)$ 和 $D(B)$ 为定义域．设 $L=D(A)\cap D(B)$．那么在线性流形 L 的元上两个算子都有定义．算子

$$(A+B)x=Ax+Bx\quad x\in L.$$

称算子 A 与 B 的和流形 L 常含零元，所以不空．但非平凡的算子和仅对 L 含有异于零的元而言．这点注意也适用于以后的定义．

今设在 $D(A)$ 内存在子集 D 使 $Ax\in D(B)$ 对任一 $x\in D$．那么在 D 上定义了算子 B 乘以算子 A 的积

$$(BA)x=B(Ax).$$

同理可以定义积 AB．

如果算子 A 一对一地映 $D(A)$ 于 $R(A)$ 上，那么存在逆算子 A^{-1} 具有定义域 $R(A)$ 和值域 $D(A)$．可能有 $R(A)=H$ 且 A^{-1} 有界，尽管 A 可能为无界线性算子．反之，有界线性算子 A 也可能有无界逆算子．例如第三章 § 5 的例子就是这样一些例子，如果把它们看做 $L_2[0,1]$ 内的算子的话．

---

*) 上面所说的这个在应用上重要的定理称 Hellinger-Toeplitz 定理．它提供了一个无界算子一般仅能在 H 的一个稠密线性集被定义．——译者注

共轭算子 设A为线性算子且其定义域$D(A)$在H内稠密．如果内积(Ax, y)对给定的y和任意$x\in D(A)$可以写成

$$(Ax,y)=(x,y^*) \tag{2}$$

的形式的话，那么我们说y属于与A共轭的算子的定义域$D(A^*)$，而共轭算子本身由等式

$$A^*y=y^*$$

定义．

因为$D(A)$依假设在H内稠密，所以元y^*由等式(2)唯一被定义．不难验证$D(A^*)$为线性流形且A^*为线性算子．注意，共轭算子的定义域非空，因它常含有零．

例．设$H=L^2(G)$，其中G为平面xoy上有界可测区域．我们考虑算子$A=\dfrac{\partial^l}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}$，它定义在具有直到$l$阶的连续偏导数且在$G$的某一边界带形(随函数而异)内为零的所有函数$\phi(x, y)$所成的集$D(A)$上，而且此集在$L_2(G)$内是稠密的．因为$D(A)$在$L_2(G)$内稠密，所以存在共轭算子$A^*$．依第二章§5的定义可知$D(A^*)$是具有$l$阶广义导数的函数$\varphi(x,y)$的全体，且$A^*$为广义微分算子$A^*\varphi=\dfrac{\partial^l\varphi}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}$．

线性算子A定义在$D(A)$上称为对称的，如果对任意x，$y\in D(A)$有等式

$$(Ax,y)=(x, Ay)^{*)}$$

对有界算子的情形．算子A的对称性的概念与它的自伴性的概念一致．但对无界算子来说，有如我们将在以后看到的那样，这两个概念是不同的．

---

*) 注意，必须要求$D(A)$在H内稠密．——译者注

有如有界算子的情形，为了 A 对称必须且只须 (Ax, x) 对任一 $x \in D(A)$ 为实. 显然对于对称算子来说关系 $y \in D(A)$ 蕴含 $y \in D(A^*)$ 而且对 $y \in D(A)$ 有

$$A^*y = Ay.$$

因此 $A^* \supset A$. 即对于对称算子 A 来说，它的共轭算子是它的扩张*)

不难验证，如果 $A \subset B$，那么 $B^* \subset A^*$.

定理 2 如果算子 A^{-1} 存在，且和 A 一样有稠密的定义域，那么 $(A^*)^{-1}$ 存在且等于 $(A^{-1})^*$.

设 $y \in D((A^{-1})^*)$. 那么对任一 $x \in D(A)$ 有

$$(x, y) = (A^{-1}Ax, y) = (Ax, (A^{-1})^*y).$$

由此 $(A^{-1})^*y \in D(A^*)$ 且

$$A^*(A^{-1})^*y = y. \tag{3}$$

同理，若 $x' \in D(A^{-1})$，$y' \in D(A^*)$，那么

$$(x', y') = (AA^{-1}x', y') = (A^{-1}x', A^*y'),$$

由此，有如以前可得 $A^*y' \in D((A^{-1})^*)$ 且

$$(A^{-1})^*A^*y' = y'. \tag{4}$$

由等式(3)和(4)可知 $(A^*)^{-1}$ 存在且等于 $(A^{-1})^*$.

可以证明

$$(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*,$$

$$(A + B)^* \supset A^* + B^*,$$

$$(AB)^* \supset B^*A^*.$$

现在来考虑一下两个算子的可换性问题. 设 A 为线性算子具有定义域 $D(A)$ 且 B 为有界线性算子. 我们说 B 与 A 可换，如果由 $x \in D(A)$ 有 $Bx \in D(A)$ 且 $ABx = BAx$. 更一般的情形是两个无界算子的可换性，这在以后再讨论.

---

*) 反之也显然成立. ——译者注

我们再引入一个定义．设 A 和 B 为线性算子且设 A 与每一个与 B 可换的有界算子可换．

在此情形下，我们说 A 与算子 B 共可换．

闭算子．算子的闭包 无界线性算子 A 不具有连续性．由 $x_n \to x_0$ 一般得不出 $\{Ax_n\}$ 趋于某一极限．然而不少无界线性算子具有一种较弱性质，它多多少少可用以代替连续性．

设 A 为线性算子以 $D(A)$ 为定义域．如果由条件 $\{x_n\}\subset D(A)$，$x_n \to x_0$ $Ax_n \to y_0$ 可得

$$x_0 \in D(A) \text{ 且 } y_0 = Ax_0,$$

那么称算子 A 为闭的

作为闭算子的例子，可以举出任意线性算子的共轭算子．

事实上，设 $y_n \in D(A^*)$ 且

$$y_n \to y_0, A^*y_n \to z_0.$$

对任一 $x \in D(A)$ 我们有

$$(x, A^*y_n) = (Ax, y_n) \to (Ax, y_0).$$

在另一方面

$$(x, A^*y_n) \to (x, z_0),$$

所以

$$(Ax, y_0) = (x, z_0)$$

对任意 $x \in D(A)$．由此可知 $y_0 \in D(A^*)$ 且 $A^*y_0 = z_0$．

前述的偏微分算子是非闭算子的一个例子．

我们说算子 A 具有闭包或说 A 是可闭的，如果存在闭算子 B 而为 A 的扩张(即 $B \supset A$)．在可闭的算子 A 的不同闭扩张中可以选所谓的极小闭扩张，它含于 A 的每一个另外的闭扩张．算子 A 的极小闭扩张称 A 的闭包并用 $\bar{A}$ 代表它．对任意可闭算子的闭包的存在及其唯一性我们不拟给出证明．我们仅限于对称算子的情形．

定理 3 对每一对称算子 A 可以构造它的闭包 $\bar{A}$．

用 $D(\overline{A})$ 代表这样元 $x\in H$ 的全体，对于它存在序列 $\{x_n\}\in D(A)$ 使

$$x_n\to x,\quad Ax_n\to y$$

对H某一元y.

显然 $D(\overline{A})$ 为线性流形且 $D(A)\subset D(\overline{A})$. 对 $x\in D(\overline{A})$ 令

$$\overline{A}x=y.$$

这个定义的 y 是唯一被确定的. 因设 $\{x'_n\}\subset D(A)$ 为另一序列使

$$x'_n\to x, Ax'_n\to y'.$$

于是由对称性可知对任一 $h\in D(A)$ 有

$$\begin{aligned}(h,y-y')&=\lim_n(h,Ax_n-Ax'_n)\\&=\lim_n(Ah,x_n-x'_n)\\&=(Ah,x-x)=0.\end{aligned}$$

因为 $D(A)$ 在H稠密，所以 $y=y'$. 算子A显然是线性的而且为A的扩张.

算子 $\overline{A}$ 是对称的,因为对任意 $x,y\in D(\overline{A})$

$$(x,\overline{A}y)=\lim_n(x_n,Ay_n)=\lim_n(Ax_n,y_n)=(\overline{A}x,y).$$

算子 $\overline{A}$ 是闭的，事实上，设 $\{x_n\}\subset D(\overline{A})$ 且 $x_n\to x$, $\overline{A}x_n\to y$. 因 $x_n\in D(\overline{A})$，所以存在元 $x'_n\in D(A)$ 使

$$\|x_n-x'_n\|<\frac{1}{n},\quad \|\overline{A}x_n-Ax'_n\|<\frac{1}{n}.$$

但这时 $x'_n\to x, Ax'_n\to y$，所以 $x\in D(\overline{A})$ 且 $\overline{A}x=y$. 这是由集 $D(\overline{A})$ 以及算子 $\overline{A}$ 的定义而来的.

至于 $\overline{A}$ 是算子A的极小闭对称扩张是因为每一元 $x\in D(\overline{A})$ 必须含于算子A的任一闭扩张的定义域.

由上述也同样得出 $\overline{A}$ 的唯一性.

注. 可以证明,**如果** $\overline{A}$ **是对称算子**A**的闭包,那么**$(\overline{A})^*$

$= A^*$.

因为 $A \subset \bar{A}$，所以 $(\bar{A})^* \subset A^*$. 我们只证相反包含.

设 $y \in D(A^*)$ 且 x 为 $D(A)$ 任一元. 我们有

$(\bar{A}x, y) = \lim_n (Ax_n, y) = \lim_n (x_n, A^*y) = (xA^*y)$.

这个等式是说 $y \in D((\bar{A})^*)$ 且 $(\bar{A})^* y = A^*y$，即是说 $A^* \subset (\bar{A})^*$.

算子的图像 为了进一步研究共轭算子以及闭包运算，我们引入算子的图像这一概念.

我们考虑 Hilbert 空间 H 和它自身的直和 $\tilde{H}$，即元对 $z = \{x, y\}$，$x \in H$，$y \in H$ 的全体并具有通常的线性运算. 此外对 $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2 \in \tilde{H}$ 我们借助等式

$$(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) = (x_1, x_2) + (y_1, y_2)$$

来定义它们的内积. 不难验证，内积的所有性质对它成立. 此外 Hilbert 空间其余的公理也满足，所以 $\tilde{H}$ 也是一个 Hilbert 空间.

设在空间 H 内给定线性算子 A，形如

$$\{x, Ax\} \quad x \in D(A)$$

的元的集 $\mathfrak{G}_r(A) \subset \tilde{H}$ 称为算子 A 的图像.

容易看出 $\mathfrak{G}_r(A)$ 是 $\tilde{H}$ 内一个由算子 A 唯一确定的线性流形. 反之，如果对两个算子 A 和 B 有 $\mathfrak{G}_r(A) = \mathfrak{G}_r(B)$，那么 $A = B$. 最后也不难验证为了算子 A 是闭的，必须且只须 $\mathfrak{G}_r(A)$ 为 $\tilde{H}$ 的闭子空间.

在 $\tilde{H}$ 内考虑算子 $\tilde{U}$ 定义为

$$\tilde{U}\{x, y\} = \{y, -x\},$$

显然 $\tilde{U}^2 = -\tilde{E}$ 且 $\tilde{U}^* = -\tilde{U}$，所以

$$\tilde{U}^*\tilde{U} = \tilde{U}\tilde{U}^* = \tilde{E}.$$

即 $\tilde{U}$ 为保范算子.

引理 设A为任一线性算子，其定义域 $D(A)$ 在H内稠密，那么 $\mathfrak{G}_r(A^*)$ 是线性流形 $U(\mathfrak{G}_r(A))$ 的正交余.

设 $\tilde{z}=\{x', y'\}\in \widetilde{H}\dot{-}\widetilde{U}(\mathfrak{G}_r(A))$. 这就是说

$$(\{x',y'\},\{Ax,-x\})=0$$

对任一 $x\in D(A)$. 由此

$$(x',Ax)=(y',x).$$

从而 $x'\in D(A^*)$ 且 $y'=A^*x'$, 即 $\{x', y'\}\in \mathfrak{G}_r(A^*)$

把上述推理倒推上去可知，若 $\{x', y'\}\in \mathfrak{G}_r(A^*)$, 那么此元和 $\widetilde{U}(\mathfrak{G}_r(A))$ 任一元成正交. 引理证完.

定理 4 设 A 为闭算子且 $D(A)$ 在 H 内稠密，那么 $D(A^*)$ 也在H稠密，从而唯一定义了 $(A^*)^*=A^{**}$. 这时 $A^{**}=A$.

因为A闭，所以 $\mathfrak{G}_r(A)$ 是闭线性流形. 这就是说 $\widetilde{U}(\mathfrak{G}_r(A))$ 也闭. 因此

$$\widetilde{H}=\widetilde{U}(\mathfrak{G}_r(A))\dot{+}\mathfrak{G}_r(A^*). \tag{5}$$

作用保范算子 $\widetilde{U}$ 于等式两端且首先注意到 $\widetilde{U}^2(\mathfrak{G}_r(A))=-\widetilde{E}\mathfrak{G}_r(A)$, 其次再注意到保范算子把正交元换成正交元，所以有

$$\widetilde{U}(\widetilde{H})=\widetilde{H}=\mathfrak{G}_r(A)\dot{+}\widetilde{U}(\mathfrak{G}_r(A^*)). \tag{6}$$

现在证 $D(A^*)$ 也稠密. 不然的话，存在异于零的元 $y_0\in H$ 与 $D(A^*)$ 正交. 元 $\tilde{y}_0=\{0,y_0\}$ 于是和 $\widetilde{U}(\mathfrak{G}_r(A^*))$ 正交，这是因为对任一 $\{y,A^*y\}\in \mathfrak{G}_r(A^*)$ 有

$$(\{0,y_0\},\widetilde{U}\{y, A^*y\})=(0, A^*y)-(y_0,y)=0.$$

由此 $\{0,y_0\}\in \mathfrak{G}_r(A)$, 从而 $y_0=Ao=0$. 这个矛盾得出定理的证明.

因为 $D(A^*)$ 稠密所以 A^{**} 唯一确定，为了证明等式 $A^{**}=A$ 只须利用关系式(6)和引理.

定理 5 为使A^{**}存在必须且只须在H内稠密集上被定

义的算子 A 是可闭的. 在此情形下 $A^{**}=\bar{A}$.

若 A 有闭包 $\bar{A}$, 那么依定理 4 $(\bar{A})^{**}=\bar{A}$. 但 $(\bar{A})^*=A^*$, 所以 $(\bar{A})^{**}=A^{**}$. 由此 $A^{**}=\bar{A}$.

设 A^{**} 存在. 应用(5)式于 A^* 可得

$$\tilde{H}=\tilde{U}(\mathfrak{G}_r(A^*))\dotplus\mathfrak{G}_r(A^{**}). \tag{7}$$

在另一方面以算子 $\tilde{U}$ 作用于等式

$$\tilde{H}=\tilde{U}\overline{(\mathfrak{G}_r(A))}\dotplus\mathfrak{G}_r(A^*),$$

可得
$$\tilde{H}=\tilde{U}(\mathfrak{G}_r(A^*))\dotplus\overline{\mathfrak{G}_r(A)}. \tag{8}$$

比较(7)和(8)可得 $\mathfrak{G}_r(A)\subset\mathfrak{G}_r(A^{**})$, 即 A 容许闭扩张 A^{**}.

不变子空间, 约化性 对无界算子也可以引入不变子空间的概念.

子空间 L 称算子 A 的不变子空间,如果

1) 由 $x\in D(A)$ 有 $Px\in D(A)$ $(P=P_L)$,

2) 由 $x\in D(A)\cap L$ 可得 $Ax\in L$ (即 $PAPx=APx$ 对所有 $x\in D(A)$).

由 1) 和 $\overline{D(A)}=H$ 可知 $D(A)\cap L$ 在 L 内稠密.

我们证明, 对无界对称算子来说, 由 L 的不变性可得 $M=H\dot{-}L$ 的不变性. 事实上,设 $x\in D(A)$ 且 $x=x_1+x_2$, 其中 $x_1\in L$, $x_2\in M$. 因为 L 为不变子空间, $x_1\in D(A)$ 而且因 $D(A)$ 为线性流,所以 $x_2=x-x_1\in D(A)$.

此外若 $x\in D(A)\cap M$ 且 y 为 $D(A)\cap L$ 任意元, 那么

$$(Ax,y)=(x,Ay)=0,$$

这是因为 $Ay\in L$ 且 $x\perp L$. 因此元 Ax 与 $D(A)\cap L$ 正交, 而且再由这个流形在 L 内稠密,所以 $Ax\perp L$, 由此 $Ax\in M$.

如果 L 是算子 A 的不变子空间, 我们也说 L 约化 A.

定理 6 为使子空间 L 约化对称算子 A, 必须且只须在

这个空间上的射影算子 P 与 A 可换。

设 L 为不变子空间。那么如果 $x\in D(A)$，那么 $Px\in D(A)$ 且 $Px\in D(A)\cap L$。依 L 不变性的条件 2)我们有

$$PAPx = APx. \tag{9}$$

因为 A 是对称算子，所以 $H\dot{-}L$ 也是 A 的不变子空间。因此有如以上

$$(E-P)A(E-P)x = A(E-P)x.$$

打开括弧后再简化可得

$$PAPx = PAx. \tag{10}$$

由(9)和(10)可得 $PAx = APx$，这就证明 A 与有界算子 P 的可换性。

反之，设 A 与 P 可换。那么首先由 $x\in D(A)$ 可得 $Px\in D(A)$。

此外对 $x\in D(A)\cap L$ 我们有

$$Ax = APx = PAx.$$

即 $Ax\in L$，这就证明了 L 的不变性。

§7 自伴算子、对称算子的扩张

线性(不一定有界)算子 A 称自伴的，如果 $A=A^*$。由此定义立刻知道每一自伴算子都是对称的。以后会看出，反之不一定成立。

关于有界自伴算子的谱的一套基本性质同样地可以移至无界自伴算子。如自伴算子的所有本征值为实数而且与不同本征值相对应的本征元相互正交，点 λ 为算子的正则值当且仅当存在数 c 使

$$\|(A-\lambda E)x\| \geqslant c\|x\|. \tag{1}$$

对任意 $x\in D(A)$，例如我们来证明这后一论断。

设 λ 为正则点，那么存在有界逆算子 $R_\lambda=(A-\lambda E)^{-1}$。因此

$$\|x\|=\|R_\lambda(A-\lambda E)x\|\leqslant\|R_\lambda\|\|(A-\lambda E)x\|,$$

我们由此得出 (1)，其中 $c=\dfrac{1}{\|R_\lambda\|}$. 反之，设 (1) 被满足. 我们仍考虑线性流形 L，它由形式如 $y=(A-\lambda E)x$，$x\in D(A)$ 的所有元所组成. 由 (1) 知 $D(A)$ 与 L 是一对一的。又 L 在 H 内稠密. 如果不然，那么在 H 内存在元 $x_0\neq 0$ 使 $(x_0,y)=0$ 对任一 $y\in L$，或

$$(x_0,Ax-\lambda x)=0 \tag{2}$$

对任一 $x\in D(A)$. 由(2)可得

$$(Ax,x_0)=(x,\bar{\lambda}x_0).$$

但这就是说 $x_0\in D(A^*)=D(A)$ 且

$$A^*x_0=Ax_0=\bar{\lambda}x_0.$$

同于有界算子的情形的推理可知这是不可能的.

最后再证 L 是闭的. 设 $\{y_n\}\subset L$ 且 $y_n\to y_0$. 若 $y_n=A_\lambda x_n$，那么由(1)

$$\|x_n-x_m\|\leqslant\frac{1}{c}\|y_n-y_m\|,$$

由此 $\|x_n-x_m\|\to 0$，由算子 A 的闭性（共轭算子必为闭的）

$$x_0=\lim_n x_n\in D(A),\quad y_0=A_\lambda x_0,$$

这就证明了 L 是闭的[1]. 点 λ 的正则性的证明同于有界算子的情形.

推论 1 为使点 λ 属于自伴算子的谱，必须且只须在 $D(A)$ 内存在这样的序列 $\{x_n\}$ 使 $\|x_n\|=1$，$\|Ax_n-\lambda x_n\|\to 0$ $n\to\infty$.

---

1) 比较下一段.

推论 2 自伴算子的正则点的集为开集，从而谱为闭集.

推论 3 每一非实数 λ 均为自伴算子的正则值，从而它的谱位置在实轴上.

对称算子的扩张理论 设给定对称算子 A，依假设其定义域 $D(A)$ 在 H 稠密.

如果 A 不闭，可取其闭包. 因此我们以后设 A 是闭算子. 现在我们来描述某些构造算子 A 的对称扩张，特别扩张对称算子为自伴算子的一般方法.

设 B 是算子 A 的对称扩张. 那么由 $A\subset B$ 可得 $B^*\subset A^*$. 但因 $B\subset B^*$，所以

$$B\subset A^*.$$

因此算子 A 的每一对称扩张总是它的共轭算子 A^* 的部分:

$$D(B)\subset D(A^*),\ By = A^*y \text{ 对 } y\in D(B). \tag{3}$$

因为 B 为对称算子，所以对任一 $y\in D(B)$，(By, y) 为实的. 但 $(By, y)=(A^*y, y)$，因此 $D(B)\subset\Gamma$，其中 Γ 代表 $D(A^*)$ 内这样元的集[1)]，对于它二次型 (A^*y, y) 取实值.

反之，如果 L 为线性流形满足条件

$$D(A)\subset L\subset\Gamma,$$

那么由等式

$$By = A^*y$$

在 L 上定义的算子 B 是 A 的对称扩张.

设 L_i 是形如 $y=(A+iE)x$ 的元所组成的线性流形，其中 i 为虚数单位，且 x 通过整个 $D(A)$. 我们证明 L_i 是子空间. 由简单的计算可得

$$\|(A\pm iE)x\|^2 = \|Ax\|^2 + \|x\|^2,$$

由此
$$\|(A+iE)x\| \geqslant \|x\|.$$

---

1) 集 Γ 不构成线性流形.

今设 $y_n=(A+iE)x_n$ 且 $y_n\to y_0$，那么 $\|y_n-y_m\|\to 0$，从而 $\|x_n-x_m\|\to 0$ 对 $n, m\to\infty$. 由H的完备性可知 $x_n\to x_0$.

因此我们有 $x_n\in D(A)$，$x_n\to x_0$，$Ax_n=y_n-ix_n\to y_0-ix_0$. 因为$A$是闭算子，所以 $x_0\in D(A)$ 且 $Ax_0=y_0-ix_0$，故 $y_0\in L_i$，由此 L_i 的闭性得证.

元 z 与子空间 L_i 正交当且仅当对任一 $x\in D(A)$

$$(z, Ax+ix)=0,$$

或

$$(Ax, z)=(x, iz),$$

即当 $z\in D(A^*)$ 且 $A^*z=iz$. 从而 L_i 的正交余是子空间 N_i，N_i 是算子 A^* 的与本征值 i 相对应的所有本征元所成的子空间.

$$H=L_i\dot{+}N_i. \tag{4}$$

同理

$$H=L_{-i}\dot{+}N_{-i}. \tag{5}$$

引理 1 闭对称算子A的共轭算子 A^* 的定义域$D(A^*)$是线性流形 $D(A)$ 和一对子空间 N_i 与 N_{-i} 的直和

$$D(A^*)=D(A)\oplus N_i\oplus N_{-i}. \tag{6}$$

设 y 为 $D(A^*)$ 任一元，我们考虑元 A^*y-iy. 由(5)

$$A^*y-iy=(Ax-ix)+\tilde{z}_0.$$

注意到等式 $Ax=A^*x$ 和 $A^*\tilde{z}_0=-i\tilde{z}_0$，由前述关系可得

$$A^*\left(y-x-\frac{1}{2}i\tilde{z}_0\right)=i(y-x)+\tilde{z}_0+A^*\left(-\frac{1}{2}i\tilde{z}_0\right)$$

$$=i(y-x)+\tilde{z}_0-\frac{1}{2}i(-i)\tilde{z}_0$$

$$=i(y-x)+\frac{1}{2}\tilde{z}_0$$

$$=i(y-x)+\frac{1}{2}i(-i)\tilde{z}_0$$

$$= i\left(y - x - \frac{1}{2} i\tilde{z}_0\right).$$

从而

$$y - x - \frac{1}{2} i\tilde{z}_0 = z \in N_i.$$

由此令 $\frac{1}{2} i\tilde{z}_0 = \tilde{z}$ 可得

$$y = x + z + \tilde{z}, \tag{7}$$

这就得出元 y 的所要的分解．今再证这个分解的唯一性．设

$$y = x_1 + z_1 + \tilde{z}_1 \tag{7$_1$}$$

为同一元 y 的另一分解．于是

$$(x - x_1) + (z - z_1) + (\tilde{z} - \tilde{z}_1) = 0 \tag{8}$$

以算子 A^* 作用等式 (8) 的两端可得

$$A(x - x_1) + i(z - z_1) - i(\tilde{z} - \tilde{z}_1) = 0 \tag{9}$$

(8)式乘以 i 再由(9)式减它可得

$$[A(x - x_1) - i(x - x_1)] - 2i(\tilde{z} - \tilde{z}_1) = 0.$$

这个等式左边的项是正交的

$$A(x - x_1) - i(x - x_1) \perp 2i(\tilde{z} - \tilde{z}_1).$$

由此

$$2i(\tilde{z} - \tilde{z}_1) = 0,$$

或 $\tilde{z} = \tilde{z}_1$．同理 $z = z_1$．从而 $x = x_1$，引理证完．

我们可取任一非实数 λ 代表虚数单位 i． 这样我们得出另一分解

$$D(A^*) = D(A) \oplus N_\lambda \oplus N_{\bar{\lambda}}.$$

对不同 λ 子空间 N_λ 和 $N_{\bar{\lambda}}$ 一般是不同的．然而可以证明，如果 λ 含于上半平面，那么 N_λ 的维数与 N_i 的维数一致，且 $N_{\bar{\lambda}}$ 的维数与 N_{-i} 的维数一致． 子空间 N_i 和 N_{-i} 的维数称为 A 的亏指数．子空间 N_i 及 N_{-i} 称为亏子空间

引理 2 为使元 $y \in D(A^*)$ 属于集 Γ(Γ 代表 $D(A^*)$

的元 y 对于它 (A^*y, y) 取实值)，必须且只须在分解 (7) 式中有等式

$$\|z\| = \|\tilde{z}\|$$

成立.

事实上，若 $y = x + z + \tilde{z}$. 那么

$$(A^*y,y) = (A^*x + A^*(z + \tilde{z}),x + (z + \tilde{z}))$$
$$= (Ax, x) + (Ax, z + \tilde{z}) + (A^*(z + \tilde{z}),x) + (A^*(z + \tilde{z}),z + \tilde{z}).$$

因为 (Ax,x) 为实，且

$$(Ax, z + \tilde{z}) + (A^*(z + \tilde{z}), x) = (x,A^*(z + \tilde{z})) + (A^*(z + \tilde{z}),x)$$

作为共轭复数的和也是实的. 所以，$\mathrm{Im}(A^*y,y) = \mathrm{Im}(A^*(z + \tilde{z}),z + \tilde{z})$. 此外

$$(A^*(z + \tilde{z}),z + \tilde{z}) = (iz - i\tilde{z},z + \tilde{z}) = i\|z\|^2 + i(z, \tilde{z}) - i(\tilde{z}, z) - i\|\tilde{z}\|^2.$$

又 $i(z,\tilde{z}) - i(\tilde{z},z)$ 也是共轭复的和，所以也是实数，因此

$$\mathrm{Im}(A^*(z + \tilde{z}),z + \tilde{z}) = i(\|z\|^2 - \|\tilde{z}\|^2).$$

由此得出引理的证明.

定理 1 对于闭对称算子 A 的每一对称扩张 B，有两个线性流形 $T_i \subset N_i$，$T_{-i} \subset N_{-i}$ 及映 T_i 于 T_{-i} 上的等距算子 U 与之对应且具有下述性质:

a) 算子 B 的定义域 $D(B)$ 由形如

$$y = x + z + Uz \tag{10}$$

的元所组成，式中 x 为 $D(A)$ 任一元，而 z 为 T_i 任一元.

b) 算子 B 在形如(10)的元上的值可依下述公式计算

$$By = Ax + iz - iUz. \tag{11}$$

反之，如果给定两个线性流形 $T_i \subset N_i, T_{-i} \subset N_{-i}$，和一个映 T_i 于 T_{-i} 上的等距算子 U. 那么在形如 (10) 的元的集上

依公式(11)定义的算子 B 是算子 A 的对称扩张.

为使算子 B 是闭的当且仅当流形 T_i 和 T_{-i} 是闭的.

设 B 是算子 A 的对称扩张且 $y\in D(B)$. 我们知道 $D(B)\subset D(A^*)$ 且依公式(7) y 具有如下形式

$$y = x + z + \tilde{z}. \tag{12}$$

而且由于 $y\in\Gamma$, 所以依引理 2

$$\|z\| = \|\tilde{z}\|. \tag{13}$$

当 y 通过 $D(B)$ 时,元 z 通过某一线性流形 T_i 且 $\tilde{z}$ 通过线性流形 T_{-i}. 这时对元 $z\in T_i$ 仅可能有一个元 $\tilde{z}\in T_{-i}$ 与之对应. 事实上,若

$$y_1 = x_1 + z_1 + \tilde{z}_1,\ y_2 = x_2 + z_2 + \tilde{z}_2,\ y_1,y_2\in D(B),$$

那么

$$y_1 - y_2 = x_1 - x_2 + 0 + (\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2)\in D(B)\subset\Gamma,$$

因此由(13)

$$\|\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2\| = \|0\| = 0,$$

即 $\tilde{z}_1 = \tilde{z}_2$.

对元 z 由于有唯一对应于它的元 $\tilde{z}$, 这样我们得出一个 T_i 到 T_{-i} 上的等距同构映像. 我们用 U 代表实现这个对应的算子,这样我们便得出等式(10),由此

$$By = A^*y = A^*(x + z + Uz) = Ax + iz - iUz,$$

等式(11)得证.

反之,设 $T_i\subset N_i$, 且 $T_{-i}\subset N_{-i}$ 为两个线性流形且 U 为等距映像映 T_i 于 T_{-i} 上. 那么在形如(10)的元上由公式(11)定义的算子 B 是算子 A 的对称扩张,因为形如(10)的元所组成的线性流形 $D(B)$ 满足条件

$$D(B)\subset\Gamma\cap D(A^*)$$

且在 $D(B)$ 上有等式

$$By = A^*y$$

成立.

我们来证明定理的最后一个论断. 为此我们注意，为了算子 B 是闭的必须且只须形如 $(B+iE)y$，$y\in D(B)$ 的元所成的流形 L_i' 是闭的. 必要性在本节之始已证明. 为了证明充分性可设 L_i' 闭但 B 不闭. 把 B 闭化我们将添加新的极限元于 L_i'，从而 L_i' 将不是闭的.

对任一 $y\in D(B)$

$$(B+iE)y=(B+iE)(x+z+\tilde{z})$$
$$=(A+iE)x+2iz,$$

由此

$$L_i'=L_i\dot{+}T_i, \tag{14}$$

式中 L_i 是形如 $(A+iE)x$，$x\in D(A)$ 的元的全体. 因为 L_i 闭，所以 L_i' 闭当且仅当 T_i 闭. 定理全部证完.

我们设由上述方法扩张对称算子 A 于对称算子 B。我们问这个扩张的亏子空间和亏指数是什么.

定理 2 设 B 是以 $D(A)$ 为定义域的闭对称算子 A 的闭对称扩张，且 B 以

$$D(B)=D(A)+T_i+U(T_i)$$

为定义域.

用 (m_1, m_2) 代表算子 A 的亏指数:

$$m_1=\dim N_i,\quad m_2=\dim N_{-i},$$

并用 (m_1', m_2') 代表算子 B 的亏指数:

$$m_1'=\dim N_i',\quad m_2'=\dim N_{-i}',$$

式中 N_i' 和 N_{-i}' 代表算子 B 的亏子空间. 那么

$$N_i=N_i'\dot{+}T_i,\quad N_{-i}=N_{-i}'\dot{+}T_{-i}$$

从而若 $\dim T_i=\dim T_{-i}=l$，那么

$$m_1=m_1'+l,\quad m_2=m_2'+l.$$

事实上由公式(4)

$$H=L_i'\dot{+}N_i'.$$

利用(14):

$$L_i' = L_i \dotplus T_i.$$

于是 $$H = L_i \dotplus N_i' \dotplus T_i.$$

在另一方面

$$H = L_i \dotplus N_i,$$

所以 $$N_i = N_i' + T_i.$$

同理可证等式

$$N_{-i} = N_{-i}' \dotplus T_{-i}.$$

由这些等式立刻可得亏指数之间关系.

现在我们来描述所谓对称算子的**极大对称扩张**.

设算子A有亏指数$(0, 0)$,这就是说亏子空间N_i与N_{-i}仅由零元组成,从而 $D(A^*) = D(A)$,但它蕴含A是自伴算子且A不再有对称扩张.

设A的亏指数有限 (m_1, m_2). 先设 $m_1 = m_2 = m \neq 0$. 在N_i和N_{-i}内选择完全规范化正交系 $e_1, e_2, \cdots, e_m, e_1', e_2', \cdots, e_m'$. 今对元 $z = \sum_{k=1}^{m} c_k e_k \in N_i$ 令元 $\tilde{z} = \sum_{k=1}^{m} c_k e_k' \in N_{-i}$ 与之对应. 显然这个对应是等距同构的,它产生的等距算子U映整个N_i于整个N_{-i}上. 作为子空间T_i和T_{-i}可依次取N_i和 N_{-i}

$$D(B) = D(A) + N_i + U(N_i).$$

于是算子B具有亏指数$(0,0)$从而是对称算子A的自伴扩张. 这样的扩张存在无限多个. 事实上对元

$$z = \sum_{k=1}^{m} c_k e_k$$

可令元

$$\tilde{z}(\tau)=\sum_{k=1}^{m}c_ke^{i\tau}e_k'$$

与之对应，式中 τ 为实数．而且更一般可令

$$\tilde{z}(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_m)=\sum_{k=1}^{m}c_ke^{i\tau_k}e_k'$$

与之对应．

这样一来我们得出连续统个等距算子 $U_{\tau_1\tau_2\cdots\tau_m}$，而与之对应的是连续统个自伴扩张．

设算子 A 有有限但不相等的亏指数 (m_1,m_2) 例如 $m_1>m_2$．先在 N_i 内选 m_2 个规范化正交基，并设由它所产生的子空间为 T_i，作为 T_{-i} 我们取整个 N_{-i}．于是

$$D(B)=D(A)+T_i+U(T_i)=D(A)+T_i+N_{-i}.$$

对称算子 B 有亏指数 $(m_1-m_2,\ 0)$ 而且不容许其它对称的随之自伴的扩张．像这样的对称算子，它的亏指数之一为零而另一亏指数不为零，称为**极大对称的**．自伴算子(在其中两个亏指数均为零)有时也称**超极大的**． 如果算子 A 的亏指数为 (m,∞) 或 (∞,m)，那么由类似于前述方法可以扩张 A 成极大算子，但算子 A 的自伴扩张不存在．

最后设算子 A 的亏指数为 (∞,∞)．考虑可分空间的情形．那么亏指数将是 $(\aleph_0,\aleph_0)$．这样的算子容许极大扩张和自伴扩张．设 T_i 为亏子空间 N_i 的可数维子空间．同构并等距地映 T_i 与 N_{-i} 上我们得极大算子 B 具有定义域

$$D(B)=D(A)+T_i+N_{-i}$$

和亏指数 $(m,\ 0)$，式中 m 依赖于 T_i 的选择可为任一有限数或无穷．如果等距同构地映 N_i 于整个 N_{-i} 上，我们得出算子 A 的自伴扩张 B。

总结起来，每一对称而非自伴的算子 A 总容许极大，自伴

或另外的对称扩张．存在算子A的连续统个相异的极大或自伴扩张*)．

对称算子扩张的例子以后给出。

§8 无界自伴算子的谱分解、自伴算子函数

以前我们对有界自伴算子得出的积分表示可以推广到无界自伴算子的情形。我们来证明这个推广而用 F. Riesz 与 E. Lorch 采用的还原无界算子为有界算子序列的方法．

Stieltjes积分 设 E_λ, $-\infty<\lambda<+\infty$ 为某一单位分解，即依赖于实参数λ的一族射影算子具有下述性质：

1) $E_\lambda \leqslant E_\mu$ 对 $\lambda<\mu$,

2) $E_{\lambda-0}=E_\lambda$,

3) $E_{-\infty}=0, E_{+\infty}=E$.

设$f(\lambda)$为一有界或无界复值函数定义于$(-\infty,\infty)$而且在此区间一致连续。分割$(-\infty,\infty)$于半开区间$[\lambda_k, \mu_k)$且讨论级数

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\nu_k)E(\Delta_k)x, \lambda_k \leqslant \nu_k < \mu_k. \tag{1}$$

这个级数由相互正交的项所组成，为了它的收敛必须且只须级数

---

*) 在应用上还有一类重要的对称算子．对称算子A称本质自伴的，如果它的闭包$\bar{A}$是自伴的，易证本质自伴算子有一个且仅有一个自伴扩张．本质自伴性的重要在于，我们经常给定一个非闭对称算子．如能证其为本质自伴，那么有唯一个与A对应的自伴算子 $\bar{A}=A^{**}$．——译者注

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(\nu_k)|^2 \|E(\Delta_k)x\|^2$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(\nu_k)|^2 (E(\Delta_k)x, x) \tag{2}$$

收敛.

最后这个级数代表了 Stieltjes 积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 d(E_\lambda x, x). \tag{3}$$

的积分和,而且为了它对$(-\infty,\infty)$的任意分割收敛必须且只须此积分收敛*).

用$D(f)$代表使(2)收敛的$x \in H$的集,或等价地使积分(3)收敛的$x \in H$的集.

设α为任一正数. 考虑半开区间 $\Delta_\alpha = [-\alpha, \alpha)$. 在此半开区间上$|f(\lambda)|$有界,所以

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} |f(\lambda)|^2 d(E_\lambda x, x) < \infty$$

对任一$x \in H$, 但

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} |f(\lambda)|^2 d(E_\lambda x, x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 d(E_\lambda E(\Delta_\alpha)x, E(\Delta_\alpha)x).$$

因此对任意α和x,形如 $E(\Delta_\alpha)x$ 的元属于 $D(f)$.

因为 $E(\Delta_\alpha)x \to x$ 对 $\alpha \to \infty$, 所以集 $\{E(\Delta_\alpha)x\}$ 从而集 $D(f)$ 在H稠密. 易证 $D(f)$ 为线性流形.

今取 $x \in D(f)$ 我们来考虑$(-\infty,\infty)$的两个半开区间 Δ_k' 和 Δ_k'' 的分割,且设

---

*) 对任一单位分解 $E(\lambda)$, 复值函数 $(E(\lambda)x, y)$ $x, y \in H$ 为囿变的, $(E(\lambda)x,x)$ 为单调增的. ——译者注

$$\max(\mu_k' - \lambda_k) \leqslant \delta \text{ 和 } \max(\mu_k'' - \lambda_k'') \leqslant \delta.$$

于是利用 $E(\Delta)$ 的可加性及正交性容易算出

$$\left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\nu_k')E(\Delta_k')x - \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\nu_k'')E(\Delta_k'')x \right\|^2$$

$$\leqslant \omega^2\{(E_\infty x, x) - (E_{-\infty}x, x)\} = \omega^2(x, x), \qquad (4)$$

$$\omega = \sup_{|\lambda-\mu|\leqslant\delta} |f(\lambda) - f(\mu)|.$$

设给定区间 $(-\infty, \infty)$ 的细分序列使

$$\delta_n = \max|\mu_k^{(n)} - \lambda_k^{(n)}| \to 0,$$

再设 $\{S_n\}$ 是对应于这些分割的级数 (1) 的和的序列. 由于 (4)序列 $\{S_n\}$ 满足 Cauchy 条件

$$\|S_{n+p} - S_n\|^2 \leqslant \omega_n^2(x, x) \to 0 \text{ 对 } n \to \infty,\ p > 0.$$

从而收敛于某一元 $S \in H$. 我们把这个元记作 $\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)dE_\lambda x$, 并称它为函数 $f(\lambda)$ 关于单位分解 E_λ 的 Stieltjes 积分.

Stieltjes 积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)dE_\lambda \qquad (5)$$

显然代表定义于线性流形 $D(S) = D(f)$ 的某一线性算子 s. 即

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)dE_\lambda x. \qquad (6)$$

由公式(5)也得

$$(Sx, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)d(E_\lambda x,\ y) \qquad (7)$$

对任意 $x \in D(S)$ 和任意 $y \in H$.

不难看出, 上述 Stieltjes 积分定义可以扩张到 $f(\lambda)$ 为分段一致连续函数的情形, 即除去具有有限跃距的有限个间断点以外它在每一连续区间是一致连续的.

由公式(7)可得

$$(Sx, x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d(E_\lambda x, x),$$

而且如果 $f(\lambda)$ 为实函数时算子 (Sx, x) 也是实的，因此实函数的 Stieltjes 积分定义了一个对称算子．

我们证明 S 也是自伴算子． 因为 $D(S)\subset D(S^*)$，这是因为 S 为对称的．我们要证明的是反包含关系．

设 x 为H任一元．且令 $\Delta_n = [-n, n)$．于是

$$x_n = E(\Delta_n)x \in D(S).$$

用 L_n 代表 $E(\Delta_n)$ 射影于其上的子空间．显然 S 和E (Δ_n) 可换．于是

$$Sx_n = SE(\Delta_n)x = E(\Delta_n)Sx \in L_n.$$

今设 y 为 $D(S^*)$ 任一元． 因为 $y_n = E(\Delta_n)y \in D(S)$ 且 $D(S)\subset D(S^*)$，所以 $y_n \in D(S^*)$ 且 $S^*y_n = Sy_n \in L_n$.

设 $z_n = y - y_n$. 于是 $z_n \in D(S^*)$ 且 $z_n \perp L_n$. 若 $\tilde{x}_n$ 是 L_n 任一元,那么

$$(S^*z_n, \tilde{x}_n) = (z_n, S\tilde{x}_n) = 0,$$

这是因 $S\tilde{x}_n \in L_n$. 由此 $S^*z_n \perp L_n$. 从而

$$\|S^*y\|^2 = \|S^*y_n\|^2 + \|S^*z_n\|^2 \geqslant \|S^*y_n\|^2 = \|Sy_n\|^2,$$

但

$$\|Sy_n\|^2 = \int_{-n}^{n} [f(\lambda)]^2 d(E_\lambda y, y).$$

因此我们得出

$$\int_{-n}^{n} [f(\lambda)]^2 d(E_\lambda y, y) \leqslant \|S^*y\|^2.$$

而 n 是任意的，所以

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(\lambda)]^2 d(E_\lambda y, y) < \infty,$$

即 $y \in D(S)$. 这就证明了 $D(S^*)\subset D(S)$，从而证明了算子

S的自伴性．

两个引理　引理1　设$H_1, H_2, \cdots, H_n, \cdots$为一Hilbert空间$H$内两两正交子空间且其正交和与$H$重合．令$x_n$代表$x$在子空间$H_n$上的射影．设$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$为一序列有界自伴算子依次定义在$H_1, H_2, \cdots, H_n, \cdots$上而且映这些子空间于其自身．那么在$H$内存在唯一自伴算子$A$在$H_n$上与$A_n$重合．而且这个算子的定义域$D(A)$由且仅由满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|A_n x_n\|^2 < +\infty \tag{8}$$

的$x \in H$所组成．对$x \in D(A)$

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} A_n x_n. \tag{9}$$

令$D(A)$代表使级数(8)收敛的$x \in H$．$D(A)$为线性流形．因设$x, y \in D(A)$，那么对任意复数α和β

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \|A_n(\alpha x + \beta y)_n\|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \|\alpha A_n x_n + \beta A_n y_n\|^2 \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} (\|A_n(\alpha x_n)\| + \|A_n(\beta y_n)\|)^2 \\
&\leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} (\|A_n x_n\|^2 + \|A_n y_n\|^2) < \infty,
\end{aligned}$$

式中C仅依赖于α和β．

线性流形$D(A)$在H内稠密，这是因为$D(A)$内含有形如$\sum_{k=1}^{n} x_n$, $x_k \in H_k$, $k = 1, 2, \cdots, n$的所有元．

在 $D(A)$ 上用公式(9)定义算子 A，这个等式右端的级数收敛．因为由元 $A_k x_k$ 的两两正交性

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{n+p} A_k x_k\right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} \|A_k x_k\|^2 \to 0$$

对 $n\to\infty, p>0$．由公式(9)定义的算子显然是线性的．此外对 $x,y\in D(A)$ 我们有

$$\begin{aligned}(Ax, y) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n x_n, \sum_{k=1}^{\infty} y_k\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n x_n, y_n)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(x_n, A_n y_n) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k, \sum_{n=1}^{\infty} A_n y_n\right)\\ &= (x, Ay),\end{aligned}$$

故算子 A 对称．因此其共轭算子 A^* 满足 $A^*\supset A$．

再证反包含，设 $y\in D(A^*)$，那么对任意 $x\in D(A)$

$$\begin{aligned}(x, A^*y) = (Ax, y) &= \sum_{k=1}^{\infty}(A_k x_k, y_k)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}(x_k, A_k y_k).\end{aligned}$$

作为 x 取任一元 $z_n\in H_n$．于是

$$(z_n, A^*y) = (z_n, A_n y_n),$$

即
$$P_{H_n}(A^*y) = P_{H_n}(A_n y_n) = A_n y_n.$$

由此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|A_n y_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\|P_{H_n}(A^*y)\|^2 = \|A^*y\|^2 < \infty,$$

所以 $y\in D(A)$ 且 $A^*y = Ay$．

最后再证明仅有一个算子 A 具有所述的性质．兹设 B 为另一个这样的算子，那么首先有

$$B\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} B_k x_k = \sum_{k=1}^{n} A_k x_k$$
$$= A\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right),$$

即在形如 $\sum_{k=1}^{n} x_k$ 的有限和上两个算子一致．今若 $x \in D(A)$，那么 $\sum_{k=1}^{n} x_k \to x$.

$$B\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} A_k x_k \to y = Ax,$$

而且因为 B 作为自伴算子是闭的，所以 $x \in D(B)$ 且 $Bx = y = Ax$. 由此证明了 $B \supset A$. 在另一方面在此包含关系中取两端的共轭得 $A \supset B$. 由此 $A = B$，引理证完．

引理 2 对任一自伴算子 A 存在两个有界自伴算子 B 和 C 使

1) $R(B) \subset D(A)$, $R(C) \subset D(A)$,

2) $0 \leqslant B \leqslant E$, $\|C\| \leqslant 1$, 由 $Bx = 0$ 有 $x = 0$,

3) $C = AB$,

4) C 与 B 可换且与 A 共可换．

取 $R_i = (A - iE)^{-1}$ 和 $R_{-i} = (A + iE)^{-1}$. 这两个有界算子一对一地映 H 于 $D(A)$ 上，此外也有 $R_i^* = R_{-i}$, $R_{-i}^* = R_i$.

令 $$B = \frac{1}{2i}(R_i - R_{-i}), \qquad C = \frac{1}{2}(R_i + R_{-i}). \tag{10}$$

算子 B 和 C 的有界性，自伴性以及第一性质是显然的．由(10)可得

$$R_i = C + iB, \; R_{-i} = C - iB. \tag{11}$$

因此

$$(A - iE)(C + iB) = (A - iE)R_i = E,$$
$$(A + iE)(C - iB) = (A + iE)R_{-i} = E,$$

打开括弧可得

$$(AC + B) + i(AB - C) = E$$
$$(AC + B) - i(AB - C) = E,$$

由此再相加相减可得

$$AC + B = E, \; AB = C \tag{12}$$

第三性质得证.

因 R_i 和 R_{-i} 与 A 可换,相互可换且与任一个与 A 可换的有界算子可换[1],所以算子 B 和 C 的性质 4) 成立.

最后对证算子 B 和 C 的性质 2). 对 $x \in D(A)$ 由简单计算可得

$$\|(A - iE)x\|^2 \geqslant \|x\|^2.$$

令 $(A - iE)x = y$. 于是 $x = R_i y$ 且

$$\|R_i y\| \leqslant \|y\|.$$

对任一 $y \in H$. 从而 $\|R_i\| \leqslant 1$.

同理 $\|R_{-i}\| \leqslant 1$. 由此

$$\|B\| \leqslant 1, \|C\| \leqslant 1 \tag{13}$$

此外以 B 右乘等式(12)的第一等式的两边可得

$$B = B^2 + ACB = B^2 + CAB = B^2 + C^2 \geqslant 0. \tag{14}$$

由 (13) 和(14)可得 $0 \leqslant (Bx, x) \leqslant (x, x)$, 即

$$0 \leqslant B \leqslant E.$$

最后设 $Bx = 0$. 那么也有 $Cx = ABx = 0$. 由此

$$x = Ex = (B + AC)x = 0,$$

---

1) 若 $AB = BA$, 那么

$$R_i B = R_i B(A - iE)R_i = R_i(A - iE)BR_i = BR_i.$$

引理证完.

算子的积分表示 设A为无界自伴算子，$\mathscr{E}_\lambda$为依引理 2 构造的有界自伴算子B的谱函数*). 因为

$$0 \leqslant (Bx, x) \leqslant (x,x),$$

所以这个算子的谱含于$[0, 1]$. 又因 $Bx = 0$ 蕴含 $x = 0$，所以$\lambda = 0$不为算子B的本征值，因此 $\mathscr{E}_\lambda$ 在$\lambda = 0$连续，从而

$$\mathscr{E}_{+0} = \mathscr{E}_0 = 0.$$

设H_n代表 $\mathscr{E}(\Delta_n)$ 射影于其上的子空间，式中 $\Delta_n = \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$对$n \geqslant 2$，且 $\Delta_1 = \left[\frac{1}{2}, 1 + \varepsilon\right)$（$\varepsilon$为任意正数）. 空间$H_n$相互正交且因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathscr{E}(\Delta_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\mathscr{E}_{1+\varepsilon} - \mathscr{E}_{\frac{1}{n+1}} \right)$$
$$= E - 0 = E,$$

所以H_n的正交和给出整个空间H. 引入函数

$$\varphi_n(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} & \text{对 } \frac{1}{n+1} \leqslant \lambda < \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{在 } \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right) \text{之外} \end{cases}$$

及算子

$$\varphi_n(B) = \int_0^{1+\varepsilon} \varphi_n(\lambda) d\mathscr{E}_\lambda = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{\lambda} d\mathscr{E}_\lambda$$
$$= \mathscr{E}(\Delta_n)\varphi_n(B).$$

显然我们有

---

*) 自伴算子的谱函数即指它的单位分解. ——译者注

$$B\varphi_n(B)=\varphi_n(B)B=\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}d\mathscr{E}_\lambda=\mathscr{E}(\Delta_n).$$

因此对任一 $x\in H_n$ 有

$$x=\mathscr{E}(\Delta_n)x=B\varphi_n(B)x=Bz\in D(A),$$

且也有

$$Ax=AB\varphi_n(B)x=C\varphi_n(B)x=\varphi_n(B)Cx$$
$$=\mathscr{E}(\Delta_n)\varphi(B_n)Cx.$$

由最后这个等式可以看出，算子 A 在 H_n 上为有界自伴算子 A_n，A_n 变换 H_n 于其自身．设 $E_\lambda^{(n)}$ 为算子 A_n 的谱函数，

$$A_n=\int_{a_n}^{b_n}\lambda dE_\lambda^{(n)}.$$

依引理 1 存在自伴算子 E_λ、$-\infty<\lambda<+\infty$，在每一 H_n 上与 $E_\lambda^{(n)}$ 重合．设 x_n 是元 x 在子空间 H_n 上的射影．因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|E_\lambda^{(n)}x\|^2\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2\leqslant\|x\|^2, \tag{15}$$

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|E_\lambda^{(n)}x\|^2$ 对任一 $x\in H$ 收敛．算子

$$E_\lambda x=\sum_{n=1}^{\infty}E_\lambda^{(n)}x \tag{16}$$

到处被定义，从而是有界自伴算子．

由于子空间 H_n 的正交性，对此算子有

$$(E_\lambda x, y)=\sum_{n=1}^{\infty}(E_\lambda^{(n)}x_n, y_n),$$

$$\|E_\lambda x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\|E_\lambda^{(n)}x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}(E_\lambda^{(n)}x_n,x_n).$$

由公式 (16) 可知，对 $\lambda<\mu$

$$E_\lambda E_\mu x = E_\lambda\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_\mu^{(n)} x_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} E_\lambda E_\mu^{(n)} x_n$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} E_\lambda^{(m)} E_\mu^{(n)} x = \sum_{n=1}^{\infty} E_\lambda^{(n)} E_\mu^{(n)} x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E_\lambda^{(n)} x = E_\lambda x,$$

同理

$$E_\mu E_\lambda x = E_\lambda x.$$

由此可知，对任意 λ 有 $E_\lambda^2 = E_\lambda$，即 E_λ 为射影算子．此外对 $\nu < \lambda$ 有

$$\|E_\lambda x - E_\nu x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|E_\lambda^{(n)} x_n - E_\nu^{(n)} x_n\|^2$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \|E_\lambda^{(n)} x_n - E_\nu^{(n)} x_n\|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} \|E_\lambda^{(n)} x_n - E_\nu^{(n)} x_n\|^2.$$

因为对任意 n，

$$\|E_\lambda^{(n)} x_n - E_\nu^{(n)} x_n\| \leqslant 2\|x_n\|,$$

所以

$$\|E_\lambda x - E_\nu x\|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{N} \|E_\lambda^{(n)} x_n - E_\nu^{(n)} x_n\|$$

$$+ 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \|x_n\|^2.$$

设给定 $\varepsilon > 0$．选N充分大使

$$2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

之后再由 $E_\lambda^{(n)}$ 的左连续性可选 ν 充分接近于 λ 使

$$\sum_{n=1}^{N} \|E_\lambda^{(n)} x_n - E_\nu^{(n)} x_n\|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

于是对这样 ν

$$\|E_\lambda x - E_\nu x\|^2 < \varepsilon^2,$$

即 $E_\nu x \to E_\lambda x$ 对 $\nu \to \lambda, \nu < \lambda$. 这就证明了函数 E_λ 的左连续性. 同理可证

$$E_\lambda x \to 0 \quad 对 \quad \lambda \to -\infty,$$

$$E_\lambda x \to x \quad 对 \quad \lambda \to +\infty.$$

这就是说，E_λ 是单位分解.

借助这样得出的单位分解构造 Stieltjes 积分

$$\tilde{A} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda,$$

而由上述定义了某一自伴算子.

设 $x \in H_n$，于是 $E_\lambda x = E_\lambda^{(n)} x$，从而

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(E_\lambda x, x) = \int_{a_n}^{b_n} \lambda^2 d(E_\lambda^{(n)} x, x) < \infty.$$

因此存在 $\tilde{A}x$ 且

$$\tilde{A}x = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda x = \int_{a_n}^{b_n} \lambda dE_\lambda^{(n)} x = A_n x.$$

这就是说，在每一 H_n 上算子 $\tilde{A}$ 与 A_n 重合. 在另一方面，在每一 H_n，算子 A 也与 A_n 重合，而且因为仅存在一个这样的算子，所以 $\tilde{A} = A$.

由此

$$Ax = \tilde{A}x = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda x.$$

这就得出了无界自伴算子的积分表示.

算子 A 的定义域 $D(A)$ 由满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(E_\lambda x, x) < \infty$$

的元 $x \in H$ 且仅由这样的元所组成. 还可以证明，单位分解由算子 A 唯一决定.

算子函数 以前我们构造过有界自伴算子的函数，同理，

我们可以构造无界自伴算子的函数，只是在实变函数和算子函数的对应中的加法性与乘法性复杂了一些。

设 A 为无界自伴算子以 $D(A)$ 为定义域和以 E_λ 为单位分解．对任一在 $(-\infty,+\infty)$ 上分段一致连续的函数 $f(\lambda)$ 我们构造算子

$$Bx=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)dE_\lambda x,$$

其定义域 $D(B)$ 由满足

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^2d(E_\lambda x,x)<+\infty$$

的所有 $x\in H$ 所组成．

有如以前看到过的那样，$D(B)$ 在 H 内稠密，而且当 $f(\lambda)$ 为实函数时，B 为自伴算子．算子 B 称为**算子 A 的函数**并用 $f(A)$ 代表它：

$$f(A)x=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)dE_\lambda x.$$

可以构造更一般形式的算子函数 [25]．即是说，算子 A 的谱函数 $E_\lambda(-\infty<\lambda<\infty)$ 产生一个区间函数 $E(\Delta)$，利用同于实变函数论的方法，此区间函数可以扩张到直线点集 M 上的算子测度 $E(M)$*⁾．这个测度定义于一类称为 A 可测的集上，此集类包含所有 Borel 集．定义可测集后，有如通常的方式可定义 A 一可测函数并构造 Lebesgue-Stieltjes 算子积分

$$f(A)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)dE_\lambda,$$

此积分先对有界可测函数然后再对无界可测函数定义．作为算子 A 的函数的算子 $f(A)$ 的定义域由满足

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^2d(E_\lambda x,x)<\infty$$

的所有这些 x 而且仅由这些 x 所组成．最后这个积分也理解

为 Lebesgue-Stieltjes 积分[25]*). 我们在这里不准备讨论这样一般的算子函数.

设给定算子 $f(A)$,其中 $f(\lambda)$ 为$(-\infty,\infty)$上分段一致连续函数. 算子 $f(A)$ 的定义域用 $D\{f(A)\}$ 代表. 对任意 n 和任意 $x\in H$,有如在本节开始所看到的,

$$E(\Delta_n)x\in D\{f(A)\},$$

但这时显然也有 $E(\Delta)x\in D\{f(A)\}$ 对任意 $\Delta=[\alpha,\beta)$,其中 α 和 β 有限且 $x\in H$ 任意. 设 $x\in D\{f(A)\}$. 由不等式

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^2d(E_\lambda E(\Delta)x,\ E(\Delta)x)\\&=\int_{\Delta}|f(\lambda)|^2d(E_\lambda x,x)\\&\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^2d(E_\lambda x,x),\end{aligned}$$

其中 $\Delta=[\alpha,\beta)$ 为任一有限或无限区间, 我们可以断定

$$E(\Delta)x\in D\{f(A)\}.$$

因为 Stieltjes 积分是积分和的极限, 所以

$$\begin{aligned}f(A)E(\Delta)x&=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)d(E_\lambda(E(\Delta)x))\\&=E(\Delta)\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)dE_\lambda x=E(\Delta)f(A),\end{aligned}$$

由此可知, $E(\Delta)$ 对任意 Δ 与 $f(A)$ 可换.

设 $k\neq 0$ 为任一实数或复数. 因为积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}|k|^2|f(\lambda)|^2d(E_\lambda x,\ x)$$

收敛,当且仅当 x 使

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^2d(E_\lambda x,\ x)$$

---

*) 关于谱测度 $E(M)$ 的清晰叙述可见 P.R. Halmos: Introduction to Hilbert Space Chelsea, New York, 1951. ——译者注

收敛．所以算子 $f(A)$ 的定义域与算子 $(kf)(A)$ 的定义域一致，且

$$(kf)(A)x = kf(A)x.$$

设 $f_1(\lambda)$ 和 $f_2(\lambda)$ 为$(-\infty, \infty)$上两个一致连续函数．如果

$$x \in D\{f_1(A)\} \cap D\{f_2(A)\},$$

那么

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} |f_1(\lambda) + f_2(\lambda)|^2 d(E_\lambda x, x)\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f_1(\lambda)|^2 d(E_\lambda x, x)\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$+ \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f_2(\lambda)|^2 d(E_\lambda x, x)\right]^{\frac{1}{2}},$$

从而 $x \in D\{(f_1 + f_2)(A)\}$．这就是说

$$f_1(A) + f_2(A) \subset (f_1 + f_2)(A). \tag{17}$$

我们来解释一下在什么条件下公式(17)的等式成立．

因为

$$[f_1(\lambda) + f_2(\lambda)] - f_2(\lambda) = f_1(\lambda),$$

所以

$$D\{(f_1 + f_2)(A)\} \cap D\{f_2(A)\} \subset D\{f_1(A)\}.$$

由此再据(17)

$$D\{(f_1 + f_2)(A)\} \cap D\{f_2(A)\} \subset D\{f_1(A)\} \cap D\{f_2(A)\}$$
$$\subset D\{(f_1 + f_2)(A)\}.$$

从而

$$D\{(f_1 + f_2)(A)\} \cap D\{f_2(A)\} = D\{f_1(A)\} \cap D\{f_2(A)\}.$$

同理可得

$$D\{(f_1 + f_2)(A)\} \cap D\{f_1(A)\} = D\{f_1(A)\} \cap D\{f_2(A)\}.$$

由此可知，在(17)式中等式成立，如果下述两个包含中至少有一个成立：

$$D\{(f_1+f_2)(A)\}\subset D\{f_1(A)\}$$

或
$$D\{(f_1+f_2)(A)\}\subset D\{f_2(A)\}.$$

例如算子 $f_1(A)$ 或 $f_2(A)$ 之一有界就是这个情形.

仍设 $f_1(\lambda)$ 和 $f_2(\lambda)$ 为实直线上任两个分段一致连续函数. 设 $x\in D\{f_1(A)f_2(A)\}$. 这就是说 $x\in D\{f_2(A)\}$ 且 $f_2(A)x\in D\{f_1(A)\}$. 后面这一包含关系是说

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f_1(\lambda)|^2d(E_\lambda f_2(A)x,f_2(A)x)<\infty, \tag{18}$$

但

$$(E_\lambda f_2(A)x,f_2(A)x)=\|E_\lambda f_2(A)x\|^2$$
$$=\int_{-\infty}^{\lambda}|f_2(\mu)|^2d(E_\mu x,x).$$

所以

$$d(E_\lambda f_2(A)x,f_2(A)x)=|f_2(\lambda)|^2d(E_\lambda x,x),$$

从而(18)取如下形式

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f_1(\lambda)f_2(\lambda)|^2d(E_\lambda x,x)<\infty.$$

由此可知 $x\in D\{(f_1f_2)(A)\}$. 这就证明了

$$D\{f_1(A)f_2(A)\}\subset D\{(f_1f_2)(A)\}=D\{(f_2f_1)(A)\}, \tag{19}$$

即
$$f_1(A)f_2(A)\subset(f_1f_2)(A). \tag{20}$$

我们来解释一下，在什么条件下公式(20)的等式成立. 设 $x\in D\{(f_1f_2)(A)\}$ 且 $x\in D\{f_2(A)\}$. 于是

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f_1(\lambda)|^2d(E_\lambda f_2(A)x,f_2(A)x)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}|f_1(\lambda)f_2(\lambda)|^2d(E_\lambda x,x)<\infty.$$

这就是说

$$f_2(A)x\in D\{f_1(A)\},$$

从而

$$x\in D\{f_1(A)f_2(A)\}.$$

由此我们得出

$$D\{f_2(A)\}\cap D\{(f_1f_2)(A)\}\subset D\{f_1(A)f_2(A)\}. \qquad (21)$$

再考虑到(19)可得

$$D\{f_2(A)\}\cap D\{(f_1f_2)(A)\}\subset D\{f_1(A)f_2(A)\}$$
$$\subset D\{(f_1f_2)(A)\}.$$

由这个包含关系可知，为了在(20)中等式成立，必须且只须 $D\{(f_1f_2)(A)\}\subset D\{f_2(A)\}$.

我们来考虑 $f_1(\lambda)=f_2(\lambda)=f(\lambda)$ 的情形.

因为在每一有限区间函数 $f(\lambda)$ 有界，所以积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^n d(E_\lambda x,x) \qquad (22)$$

的发散性仅能由于 $|\lambda|\to\infty$ 时 $|f(\lambda)|$ 的无限增加. 但因 $|f(\lambda)|^{n-1}$ 的增长慢于 $|f(\lambda)|^n$，所以由积分(22)的收敛得出积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^{n-1}d(E_\lambda x,x)$$

的收敛，这就是说 $D\{(f^n)(A)\}\subset D\{(f^{n-1})(A)\}$. 由此根据以上所述

$$(f^{n-1}(A))f(A)=(f^n)(A),$$

从而

$$[f(A)]^n=(f^n)(A)$$

即

$$[f(A)]^n=\int_{-\infty}^{\infty}[f(\lambda)]^n dE_\lambda.$$

现在我们来求与算子 $f(A)$ 共轭的算子 $f(A)^*$. 如果 $f(\lambda)$ 为实函数，那么我们已知 $f(A)$ 为自伴算子.

若 $f(\lambda)=u(\lambda)+iv(\lambda)$ 为 $(-\infty,\infty)$ 上有界复函数，那么由已证的事实

$$f(A)^*=[u(A)+iv(A)]^*=u(A)^*-iv(A)^*$$

$$= u(A) - iv(A) = \bar{f}(A),$$

式中 $\bar{f}(\lambda)$ 代表 $f(\lambda)$ 的复值共轭函数．若 $f(\lambda)$ 无界，把它记成

$$f(\lambda) = |f(\lambda)| e^{i\arg f(\lambda)} = g(\lambda)h(\lambda).$$

在此 $g(\lambda)$ 是实的，$|h(\lambda)| = 1$，而且 $f(A)$ 与 $g(A)$ 的定义域显然一致．算子 $g(A)$ 是自伴的且 $h(A)$ 是有界的．因此

$$f(A)^* = [g(A)h(A)]^* = h^*(A)g(A)$$
$$= \bar{h}(A)g(A) = \bar{f}(A).$$

设 T 为有界线性算子与 A 可换．那么 T 对任一正则值 λ 与 $R_\lambda = (A - \lambda E)^{-1}$ 可换．随之与算子

$$B = \frac{1}{2i}(R_i - R_{-i})$$

可换．再由 T 和 B 的可换性知 T 和任一有界函数 $f(B)$ 可换，特别与这个算子的谱函数 $\mathscr{E}_\lambda$ 和上面引入的函数 $\varphi_n(B)$ 可换．最后这个可换性是说子空间 H_n 约化 T．因此对 $x \in H_n$，

$$A_n Tx = ATx = TAx = TA_n x,$$

即 A_n 与 T 在 H_n 上可换，但这时 T 与算子 A_n 的谱函数 $E_\lambda^{(n)}$ 可换．既然算子 A 的谱函数 E_λ 可以表成

$$E_\lambda x = \sum_{n=1}^{\infty} E_\lambda^{(n)} x$$

的形式，式中级数对每一 $x \in H$ 收敛．由此可知

$$TE_\lambda = E_\lambda T.$$

再由 T 和 E_λ 的可换性知 T 与任一有界函数 $f(A)$ 可换．

最后，若 $f(A)$ 为无界函数，那么令

$$f_n(A) = f(A)\chi_n(A),$$

其中 $\chi_n(\lambda)$ 代表半开区间 $[-n, n)$ 的特征函数．对任一 $x \in D\{f(A)\}$ 我们有

$$f_n(A)Tx = Tf_n(A)x. \tag{23}$$

因为 $x \in D\{f(A)\}$，所以 $f_n(A)x \to f(A)x$ 对 $n \to \infty$. 由此

$$Tf_n(A)x \to Tf(A)x.$$

但当 $n \to \infty$ 时等式 (23) 左边趋于极限 $Tf(A)x$，这就是说

$$Tx \in D\{f(A)\}$$

且
$$f(A)Tx = Tf(A)x.$$

因此算子 A 的任一函数与算子 A 可换的任一有界线性算子可换，即与算子 A 共可换. 可以证明在可分 Hilbert 空间的情形，这个性质特征化了算子函数，即是说

定理 设空间 H 可分. 为使在 H 稠密定义的闭算子 B 是自伴算子 A 的函数 $f(A)$，必须且只须 B 和凡与 A 可换的有界线性算子可换*).

有关这个定理的证明例如见[25]或[27].

设 λ 为复数或实轴上的点，在后一情形要求存在此点邻域 (α,β) 而在其内 E_μ 为常值. 在前一情形令

$$\varphi(\mu) = \frac{1}{\mu-\lambda} \quad -\infty < \mu < \infty,$$

在后一情形令

$$\varphi(\mu) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu-\lambda} & \text{在 } (\alpha, \beta) \text{ 之外} \\ 0 & \text{若 } \mu \in (\alpha, \beta). \end{cases}$$

那么 $\varphi(\mu)$ 在整个数轴上有界且一致连续. 随之 $\varphi(A)$ 为有界算子，从而

$$(A-\lambda E)\varphi(A) = \varphi(A)(A-\lambda E)$$

---

*) 算子函数 $f(A) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) dE_\lambda$ 的这个特征化定理即有名的 Neumann-Riesz 定理，f 为 $(-\infty, \infty)$ 上到处有限 Borel 可测函数. ——译者注.

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\mu - \lambda) \frac{1}{\mu - \lambda} dE_\mu$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dE_\mu = E.$$

由此我们仍然得出： 复数以及具有 E_μ 在其内为常值的邻域的实数均为正则点且预解算子为

$$R_\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE_\lambda}{\mu - \lambda}.$$

反之，设 R_λ 对某一实数 λ 存在，那么重复本章 §5 定理 5 的推理可知在 λ 的某一邻域内谱函数 E_μ 为常值.

最后，有如有界自伴算子的情形，可以证明为了点 λ_0 为算子的本征值必须且只须 λ_0 是此算子的谱函数的间断点.

我们再来讨论一下预解算子. 首先有

1. 若 $R_\lambda x = 0$，那么 $x = (A - \lambda E)R_\lambda x = (A - \lambda E)0 = 0$. 另外由算子函数的运算法则有：

2. $R_\lambda^* = R_{\bar{\lambda}}$,

3. $$R_\lambda - R_\mu = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE_\eta}{\eta - \lambda} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE_\eta}{\eta - \mu}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda - \mu}{(\eta - \lambda)(\eta - \mu)} dE_\eta$$

$$= (\lambda - \mu) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE_\eta}{\eta - \lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE_\eta}{\eta - \mu}$$

$$= (\lambda - \mu) R_\lambda R_\mu.$$

这就是所谓 Hilbert 的予解方程.

由上所述，自伴算子的予解算子具有性质 1—3. 事实上，反之也成立. 即是说：

设给定一族依赖于复参数 λ 的有界线性算子 R_λ 具有性质

1) 由 $R_\lambda x=0$ 有 $x=0$,

2) $R_\lambda^*=R_{\bar\lambda}$,

3) $R_\lambda-R_\mu=(\lambda-\mu)R_\lambda R_\mu$,

那么存在有界或无界自伴算子 A 而以此族算子 R_λ 为其预解算子族.

这一结果的证明可参看[25]*).

最后，再由预解算子的预解方程可以证明预解算子是参数 λ 的解析函数，即在预解算子的正则点 λ_0 的某一邻域内可以依 $\lambda-\lambda_0$ 的幂在算子空间内一致收敛意义下展开成级数[25].

§9 无界算子的例

乘自变量的乘法算子 在空间 $L_2(-\infty,\infty)$ 内乘以自变量的乘法算子可作为无界算子的一个例子. 设 $D(A)$ 表示满足

$$\int_{-\infty}^{\infty}t^2|x(t)|^2dt<\infty$$

的函数 $x(t)\in L_2(-\infty,\infty)$ 的全体所成的流形. 不难看出线性流形 $D(A)$ 在 $L_2(-\infty,\infty)$ 内稠密,因为它含有在某一区间 $[a,b](|a|,|b|<\infty)$ 外为零的所有有界可测函数. 在流形 $D(A)$ 上定义算子 A 为

$$Ax=tx(t).$$

因为

$$(Ax,x)=\int_{-\infty}^{\infty}tx(t)\bar{x}(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}t|x(t)|^2dt$$

为实数,所以 A 是对称算子.

---

*) 文献 [25] 为俄文且不易得见,凡指定参考 [25] 的结果均可阅读[27]或[23] 的有关章节. ——译者注

我们证明A为自伴算子.

设 $y(t)\in D(A^*)$ 且 $x(t)$ 为任一平方可和且对 $|t|>n$ 为零的函数. 于是 $x(t)\in D(A)$ 且

$$(Ax, y)=(x, y^*)$$

或

$$\int_{-n}^{n} tx(t)\bar{y}(t)dt=\int_{-n}^{n} x(t)\overline{ty(t)}dt=\int_{-n}^{n} x(t)\overline{y^*(t)}dt,$$

由此

$$\int_{-n}^{n} x(t)\overline{[y^*(t)-ty(t)]}\,dt=0.$$

再由 $x(t)$ 的任意性可知

$$y^*(t)-ty(t)=0$$

对任意固定的n在$[-n,n]$上殆遍成立,从而在$(-\infty,\infty)$内殆遍成立.因为$y^*(t)\in L_2(-\infty,\infty)$,所以$ty(t)\in L_2(-\infty,\infty)$,即 $y(t)\in D(A)$. 因此 $D(A^*)\subset D(A)$, 从而 $D(A^*)=D(A)$. 这就证明了A的自伴性.

算子A没有本征值, 因为若 $Ax=\sigma x(t)$, 那么 $(t-\sigma)x(t)=0$, 由此 $x(t)=0$ 在$(-\infty,\infty)$殆遍成立.

在另一方面,每一实数σ都是谱的点,为了证实这一点,只须重复对本章§4 关于空间 $L_2[0,1]$ 内乘以自变量的乘法算子的推理即可.因此算子A具有充满整个实轴的纯连续谱.

算子A的预解算子由公式

$$R_\lambda x=\frac{1}{t-\lambda}x(t)$$

确定. 由此

$$(R_\lambda x, x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|x(t)|^2}{t-\lambda}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t-\lambda}d\varphi(t)$$

其中 $\varphi(t)=\int_{-\infty}^{t}|x(t)|^2dt$.

在另一方面

$$(R_\lambda x,\ x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d(E_\mu x,\ x)}{\mu-\lambda}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\mu-\lambda}\,d\rho(\mu).$$

今此两式相等可知

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\varphi(\xi)}{\xi-\lambda}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\rho(\xi)}{\xi-\lambda}$$

对所有非实 λ 成立. 注意到 $\varphi(\xi)$ 及 $\rho(\xi)$ 的连续性再由 Stieltjes 反演公式[25]可得

$$\rho(\xi)=\varphi(\xi),$$

即

$$(E_\lambda x,x)=\int_{-\infty}^{\lambda}|x(t)|^2dt.$$

由此

$$(E(\Delta)x,x)=\int_{\Delta}|x(t)|^2dt=\int_{-\infty}^{\infty}\chi_\Delta(t)|x(t)|^2dt,$$

式中 $\chi_\Delta(t)$ 代表区间Δ的特征函数. 这样一来, 我们就得出, 对任意区间Δ

$$E(\Delta)x=\chi_\Delta(t)x(t).$$

算子A的积分表示取如下形式

$$Ax=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE_\lambda x=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d(\chi_\lambda(t)x(t))=tx(t).$$

在此 $\chi_\lambda(t)$ 代表区间 $(-\infty,\lambda)$ 的特征函数. 而且 Stieltjes 积分还原成被积式在积分函数的唯一跃点的值.

与实函数 $F(\lambda)$ 对应的算子函数 $F(A)$ 显然具有

$$F(A)x=F(t)x(t)$$

的形式.

微分算子 作为无界算子的第二个例子可以考虑微分算子.

在 Hilbert 空间 $L_2(a,b)$ 内——a 和 b 可为有限数也可以为无穷——引入算子

$$A = i\frac{d}{dt}.$$

先设 a 和 b 有限，例如设 $a = 0,\ b = 1$. 设已知算子的定义域 $D(A)$ 由满足边界条件

$$x(0) = x(1) = 0 \tag{1}$$

且导数平方可和的绝对连续函数所组成. 于是由分部积分法不难断定

$$(Ax, y) = \int_0^1 i\frac{dx(t)}{dt}\,\bar{y}(t)dt = \int_0^1 x(t)\left(\overline{i\frac{dy(t)}{dt}}\right)dt$$

$$= (x, Ay)$$

对任意 $x,\ y \in D(A)$ 成立，即 A 为对称算子。

今设 $a = 0,\ b = \infty$. 令 $D(A)$ 代表满足边界条件 $x(0) = 0$ 且导数 $\frac{dx(t)}{dt}$ 平方可和的 $x(t) \in L_2(0, \infty)$ 的全体.

我们证明在已知情形下也有 $x(\infty) = 0$.

因为 $x(t)$ 和 $\frac{dx(t)}{dt}$ 平方可和，所以 $x(t)\overline{\frac{dx(t)}{dt}}$ 在 $[0,\infty)$ 可和. 我们可以写

$$|x(t)|^2 = |x(0)|^2 + \int_0^t x(\tau)\overline{\frac{dx(\tau)}{d\tau}}d\tau + \int_0^t \bar{x}(\tau)\frac{dx(\tau)}{d\tau}d\tau.$$

对 $t \to \infty$ 这个等式右边趋于有限极限，从而存在

$$\lim_{t\to\infty}|x(t)| < \infty.$$

再由 $|x(t)|^2$ 在 $[0,\infty)$ 上的可和性，所以这个极限只能为零.

因此，在这第二个情形下我们有

$$x(0) = x(\infty) = 0. \tag{2}$$

由公式

$$\int_0^n i\frac{dx(t)}{dt}\overline{y(t)}dt = ix(n)\overline{y(n)} + \int_0^n x(t)\left(\overline{i\frac{dy(t)}{dt}}\right)dt$$

可知当 $n \to \infty$ 时

$$(Ax, y) = (x, Ay),$$

即是说，在第二情形下 A 也是对称算子.

我们考虑第三情形，即 $a = -\infty$, $b = \infty$ 的情形. 令 $D(A)$ 代表在 $(-\infty, \infty)$ 上具有平方可和导数的所有平方可和函数的全体. 和上面一样，可以证明在这个假设下有

$$x(-\infty) = x(\infty) = 0. \tag{3}$$

且 A 仍为对称算子.

我们必须指出 $D(A)$ 在 $L_2(a, b)$ 内稠密. 令 (α, β) 代表区间，设它在有限区间的情形与 $(0,1)$ 一致，且在第二情形下等于 $(0,\beta)$ 而 β 为任一有限数. 之外在第三情形下等于任一有限区间.

若 $y(t)$ 为 $L_2(a, b)$ 内函数与 $D(A)$ 成正交. 在第一情形下作为 $x(t)$ 可选 $D(A)$ 内任一函数，而且在另外两个情形下可选 $D(A)$ 内任一个在 (α, β) 之外为零的函数作为 $x(t)$. 我们有

$$0 = (x, y) = \int_\alpha^\beta x(t)\overline{y(t)}dt = -\int_\alpha^\beta \frac{dx(t)}{dt}Y(t)dt,$$

式中 $Y(t)$ 为 $y(t)$ 的原函数. 因为作为 $x(t)$ 可选在 (α, β) 连续且在此区间的端点为零的任一函数，所以对连续函数 $Y(t)$ 应用变分学上所熟知的引理可得 $Y(t) = \text{const}$, 从而在区间 (α, β) 上 $y(t) \equiv 0$, 也就是说在整个 (a, b) 上恒为零. 由此

可知 $A=i\frac{d}{dt}$ 在所有的三个情形下为对称算子.

我们来求共轭算子 A^*.

设 $y\in D(A^*)$. 那么对任意 $x\in D(A)$

$$(Ax,y)=\int_a^b i\frac{dx(t)}{dt}\overline{y(t)}\,dt=\int_a^b x(t)\overline{y^*(t)}\,dt$$

$$=(x,y^*).$$

今取 $x(t)$ 为 $D(A)$ 内任一函数而在区间 (α,β) 之外为零. 那么前述等式给出

$$\int_\alpha^\beta i\frac{dx(t)}{dt}\overline{y(t)}\,dt=\int_\alpha^\beta x(t)\overline{y^*(t)}\,dt.$$

用分部积分法积分上式右端可得

$$\int_\alpha^\beta i\frac{dx(t)}{dt}\overline{y(t)}\,dt=-\int_\alpha^\beta\frac{dx(t)}{dt}\overline{Y^*(t)}\,dt. \tag{4}$$

其中 $Y^*(t)=\int_0^t y^*(\tau)d\tau$ 为 $y^*(t)$ 的原函数. 等式 (4) 可以写成

$$\int_\alpha^\beta\frac{dx(t)}{dt}\overline{[iy(t)-Y^*(t)]}\,dt=0.$$

由此仍然得出在 (α,β) 上从而在 (a,b) 上

$$iy(t)-Y^*(t)=\text{const}. \tag{5}$$

即 $y(t)$ 为 (a,b) 上平方可和函数且在此区间上有平方可和导数. 由 (5) 可得

$$y^*(t)=\frac{d}{dt}(Y^*(t))=i\frac{dy(t)}{dt},$$

即
$$A^*y=i\frac{dy}{dt}$$

对任一 $y\in D(A^*)$. 反之, 如果函数 $y(t)$ 具有上述性质, 那

么由分部积分法有

$$\int_\alpha^\beta i\frac{dx(t)}{dt}\overline{y(t)}\,dt=\int_\alpha^\beta x(t)\left(\overline{i\frac{dy(t)}{dt}}\right)dt$$

$$=\int_\alpha^\beta x(t)\,\overline{y^*(t)}\,dt,$$

而且在第二和第三情形下取极限 $\beta\to\infty$ 或 $\alpha\to-\infty$, $\beta\to\infty$可得

$$(Ax,y)=(x,y^*),$$

即 $y\in D(A^*)$.

因此 $D(A^*)$ 由在 (a, b) 上平方可和且在此区间上具有平方可和导数的函数所组成.

回忆一下 $D(A)$ 的定义，我们看出在第一和第二情形下 $D(A^*)$ 较 $D(A)$ 为广,而在第三情形下 $D(A^*)=D(A)$. 从而在第三情形下 A 是自伴的(或超极大的).

我们证明在第一和第二情形下 A 是闭算子,为此只须证 $A=A^{**}$. 因为 $A^{**}\subset A^*$, 所以 A^{**} 在其定义域 $D(A^{**})$ 内仍为微分算子. 设 $x(t)\in D(A^{**})$. 在第一情形下对任一函数 $y(t)\in D(A^*)$ 并在第二情形下对任一在 (α,β) 外为零的 $D(A^*)$ 的函数我们用分部积分法可得

$$(A^{**}x,y)=\int_\alpha^\beta i\frac{dx(t)}{dt}\overline{y(t)}\,dt$$

$$=[x(\beta)\overline{y(\beta)}-x(\alpha)\overline{y(\alpha)}]\,i$$
$$+\int_\alpha^\beta x(t)\left(\overline{i\frac{dy(t)}{dt}}\right)dt\ .$$

在另一方面

$$(A^{**}x,y)=(x,A^*y)=\int_\alpha^\beta x(t)\left(\overline{i\frac{dy(t)}{dt}}\right)dt.$$

比较这两个式子我们看出

$$x(\beta)\overline{y(\beta)} - x(\alpha)\overline{y(\alpha)} = 0,$$

由此在第一情形下

$$x(1)\overline{y(1)} - x(0)\overline{y(0)} = 0,$$

而在第二情形下对 $\beta \to \infty$

$$x(0)\overline{y(0)} = 0.$$

因为 $y(0)$ 和 $y(1)$ 可以任意选择，所以后面等式仅当

$$x(0) = x(1) = 0$$

时可能. 但这时 $x(t) \in D(A)$，从而我们证明了 $D(A^{**}) \subset D(A)$. 由此 $D(A) = D(A^{**})$.

我们来定义算子 A 的亏指数. 方程 $A^*x = ix$ 在我们考虑的情形下为

$$i\frac{dx}{dt} = ix.$$

除去线性相关外此方程有唯一解 $x(t) = ce^t$. 同理，方程

$$A^*x = -ix$$

有唯一解

$$x(t) = ce^{-t}.$$

在有限区间的情形下，这两个解均属于 $L_2(a, b)$，从而两个子空间 N_i 及 N_{-i} 都是一维的，故算子有亏指数 (1, 1). 在第二情形下，属于空间 $L_2[0,\infty)$ 的仅有第二方程的解 ce^{-t}，而子空间 N_i 仅由零元组成. 从而在此情形下算子 A 的亏指数为 (0,1). 这就是说，在第二情形下 A 是极大的且无自伴扩张.

我们来构造在第一情形下算子 A 的所有自伴扩张，子空间 N_i 与 N_{-i} 依次由元 e^t 及 e^{-t} 所产生. 因为

$$\|e^t\| = \left(\int_0^1 e^{2t}dt\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{e^2-1}{2}},$$

$$\|e^{-t}\| = \left(\int_0^1 e^{-2t}dt\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{e}\sqrt{\frac{e^2-1}{2}},$$

所以元 e^t 和 e^{1-t} 有同一范数. 对元 e^t 使元 $e^{i\tau}e^{1-t}$ 与之对应,其中 τ 为任一实数. 对每一 τ 在由形式如

$$y(t) = x(t) + ce^t + ce^{i\tau}e^{1-t},\ x(t)\in D(A), \qquad (6)$$

的函数所组成的流形 D_τ 上由下等式

$$A_\tau y = Ax + ice^t - ice^{i\tau}e^{1-t}$$

定义算子 A_τ.

这是算子 A 的自伴扩张. 这个算子的定义域 D_τ 可借助边界条件给定. 事实上,若函数 $y(t)$ 可表为 (6) 的形式,那么

$$y(0) = c + ce^{1+i\tau} = c(1+e^{1+i\tau}),$$

$$y(1) = ce + ce^{i\tau} = c(e^{i\tau}+e).$$

由此

$$\frac{y(0)}{y(1)} = \frac{1+e^{1+i\tau}}{\rho^{i\tau}+e}.$$

因为

$$\zeta = \frac{1+ez}{z+e}$$

变换复平面上单位圆于其自身,所以可写

$$\frac{1+e^{1+i\tau}}{e^{i\tau}+e} = e^{i\sigma},$$

式中 σ 为一实数. 因此

$$y(0) = e^{i\sigma}y(1).$$

反之如果此条件满足,那么 $y(t)$ 将具有(6)式的形式. 事实上,设 $y(0) = e^{i\sigma}y(1) = \dfrac{1+e^{1+i\tau}}{e^{i\tau}+e}y(1)$. 令

$$c = \frac{y(0)}{1 + e^{1+i\tau}} = \frac{y(1)}{e^{i\tau} + e},$$

且令

$$x(t) = y(t) - c(e^t + e^{i\tau}e^{1-t}).$$

那么

$$\begin{aligned} x(0) &= y(0) - c(1 + e^{1+i\tau}) \\ &= y(0) - \frac{y(0)}{1 + e^{1+i\tau}}(1 + e^{1+i\tau}) \\ &= y(0) - y(0) = 0. \end{aligned}$$

同理可证 $x(1) = 0$. 从而

$$y(t) = x(t) + c(e^t + e^{i\tau}e^{1-t}),$$

式中 $x(t) \in D(A)$，即它具有 (6) 的形式.

由此可知，算子 A 的自伴扩张 A_τ 的定义域由 $L_2[0,1]$ 内具有平方可和导数且满足

$$y(0) = e^{i\sigma}y(1), \quad e^{i\sigma} = \frac{1 + e^{1+i\tau}}{e^{i\tau} + e}$$

的函数 $y|t|$ 且仅由这些函数所组成.

给参数 t 以不同的值我们得出连续统个不同的自伴扩张. 我们来求算子 A_τ 的谱. 它的本征函数是边值问题

$$i\frac{dx}{dt} = \lambda x \quad \lambda \text{ 实数}, \tag{7}$$

$$x(0) = e^{i\sigma}x(1).$$

的解. 它的解是函数 $e^{-i\lambda t}$，且它满足条件

$$1 = e^{i(\delta-\lambda)}.$$

由此 $$\sigma - \lambda = 2k\pi,$$

或 $$\lambda_k = \sigma - 2k\pi.$$

从而本征函数是

$$x_k(t) = e^{-i\lambda_k t} = e^{-i\sigma t}e^{2k\pi it}.$$

这些本征函数显然是规范化的．实轴上异于 λ_k 的所有点都是算子 A_t 的正则点．事实上，方程

$$i\frac{dx}{dt}-\lambda x=y$$

的一般解为

$$x=e^{-i\lambda t}\left(c-i\int_0^t e^{i\lambda\xi}y(\xi)d\xi\right),$$

我们只须指出可以选择常数 c 使之满足条件 $x(0)=e^{i\sigma}x(1)$．

这就导致方程

$$c=e^{i\sigma}\left\{e^{-i\lambda}\left(c-i\int_0^1 e^{i\lambda\xi}y(\xi)d\xi\right)\right\},$$

而它显然可解，如果

$$e^{i(\sigma-\lambda)}\neq 1$$

(即若 $\lambda\neq\lambda_k$)．因此算子 A_τ 具有纯点谱．

$$x=\int_{-\infty}^{\infty}dE_\lambda x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}E_{\lambda_n}x=e^{-i\sigma t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{2\pi nit},\tag{8}$$

$$A_\tau x=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE_\lambda x=e^{-i\sigma t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lambda_n c_n e^{2\pi nit},\tag{9}$$

式中 $c_n=(x,x_n)$．算子 A_τ 的函数有如下形式

$$F(A_\tau)x=e^{-i\sigma t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\lambda_n)c_n e^{2\pi nit}.\tag{10}$$

特别，对预解算子 R_λ 有如下分解

$$R_\lambda x=e^{-i\sigma t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{c_n}{\sigma-2n\pi-\lambda}e^{2\pi nit}.\tag{11}$$

对 $\sigma=0$，公式(8)给出平方可和函数的 Fourier 级数展开．

我们现在回到无穷区间 $(-\infty,\infty)$ 的情形．我们仍在

$L_2(-\infty,\infty)$ 内考虑自伴算子 $A = i\frac{d}{dt}$.

我们证明这个算子保范等价于空间 $L_2(-\infty, \infty)$ 内乘以自变量的乘法算子. 这时无界算子 A 和 B 的保范等价性是如下理解的: 存在保范算子 U 使 $UD(A) = D(B)$, (从而 $D(A) = U^{-1}D(B)$) 且

$$UAU^{-1}x = Bx$$

对任意 $x \in D(B)$.

为了建立算子 $A = i\frac{d}{dt}$和 $B = t$ 的保范等价性, 我们利用有名的 Plancherel 定理,有关它的证明例如见 [31].

设 $x(t)$ 为空间 $L_2(-\infty, \infty)$ 内实值或复值函数. 令

$$y(t, a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} x(\tau)e^{it\tau}d\tau.$$

于是 $y(t, a)$ 对 $a \to \infty$ 在 $(-\infty, \infty)$ 内平均收敛于某一函数 $y(t) \in L_2(-\infty,\infty)$. 若再令

$$x(t, a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} y(\tau)e^{-it\tau}d\tau,$$

那么 $x(t, a)$ 平均收敛于 $x(t)$.

函数 $x(t)$ 和 $y(t)$ 也由公式

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\frac{e^{it\tau} - 1}{i\tau}d\tau$$

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)\frac{e^{-it\tau} - 1}{-i\tau}d\tau$$

联系.

此外

$$\|x(t)\| = \|y(t)\|.$$

前述公式中的区间 $(-a, a)$ 也可以换成 $(-a, b)$, 其中 a

和 b 独立地趋近于∞.

今设 U 为 $L_2(-\infty,\infty)$ 内算子由等式

$$Ux=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)e^{it\tau}dt$$

定义,式中积分理解为有限区间上的积分依平均收敛的极限. 算子 U 依上述 Plancherel 定理一对一地映 $L_2(-\infty,\infty)$ 于其自身上而且保持范数. 即是说 U 为保范算子. 其逆算子具有

$$U^{-1}x=U^*x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-it\tau}dt$$

形式.

设 $x(t)$ 为 $D(A)$ 内任一函数,即 $x(t)\in L_2(-\infty,\infty)$ 且存在 $\frac{dx(t)}{dt}\in L_2(-\infty,\infty)$. 于是[1)]

$$\begin{aligned}y(t)=Ux&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,e^{it\tau}dt\\&=\text{l.i.m}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}x(t)e^{it\tau}dt\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\text{l.i.m}\left[x(t)\frac{e^{it\tau}}{it}\Big|_{-a}^{a}-\frac{1}{it}\right.\\&\qquad\left.\times\int_{-a}^{a}\frac{dx(t)}{dt}e^{it\tau}dt\right]\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{it}\text{l.i.m}[x(a)e^{iat}-x(-a)e^{-iat}]\\&\quad-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{it}\text{l. i. m}\int_{-a}^{a}\frac{dx(t)}{dt}e^{it\tau}dt.\end{aligned}$$

1) 记号 l. i. m 代表平均收敛极限.

因为 $x(t)$ 和 $\frac{dx}{dt}$ 属于空间 $L_2(-\infty,\infty)$，所以当 $a\to\infty$ 时 $x(a)$ 和 $x(-a)$ 趋近于零. 从而上述等式右端第一项的极限为零. 随着 $\frac{dx(t)}{dt}$ 可知此函数的 Fourier 变换也属于 $L_2(-\infty,\infty)$. 因此

$$ty(t)=-\frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx(\tau)}{dt}e^{it\tau}dt=z(t)\in L_2(-\infty,\infty).$$

从而 $y(t)\in L_2(-\infty,\infty)$ 且 $ty(t)\in L_2(-\infty,\infty)$，即 $y(t)\in D(B)$.

反之，设 $x(t)\in D(B)$. 于是

$$\int_a^b|x(t)|dt\leqslant\left(\int_a^b t^{-2}dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b|tx(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}<\infty$$

对任一不含点 $t=0$ 的有限或无限区间成立，从而 $x(t)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 内绝对可积，因此积分

$$y(t)=U^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-it\tau}dt$$

绝对收敛. 引入函数

$$\begin{aligned}z(t)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tau x(\tau)e^{-it\tau}d\tau\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}\tau x(\tau)\frac{e^{-it\tau}-1}{-i\tau}d\tau.\end{aligned}$$

我们看

$$\begin{aligned}\int_0^t z(\tau)d\tau&=\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)(e^{-it\tau}-1)d\tau+c\\&=i(y(t)-y(0))+c.\end{aligned}\tag{12}$$

我们注意在这个公式中出现的无穷积分关于 t 整个轴上绝对且一致收敛. 由(12)可得

$$y(t)=\frac{1}{i}\int_0^t z(\tau)d\tau+c, \tag{13}$$

由此可知$\frac{dy(t)}{dt}$存在且属于 $L_2(-\infty, \infty)$，即是说 $y(t)\in D(A)$.

这样一来我们就证明了 $Ux\in D(B)$ 对 $x\in D(A)$ 且 $U^{-1}x\in D(A)$ 对 $x\in D(B)$.

设 $x\in D(B)$. 由 (13) 我们有

$$U^{-1}x=y(t)=\frac{1}{i}\int_0^t z(\tau)d\tau+c.$$

从而

$$AU^{-1}x=i\frac{dy}{dt}=z(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tau x(\tau)e^{-it\tau}d\tau$$
$$=U^{-1}Bx.$$

由此

$$UAU^{-1}x=Bx.$$

这就证明了算子A和B的保范等价性.

设A和B为任意保范等价算子 $UAU^{-1}=B$.

若 E_λ, $-\infty<\lambda<\infty$ 为算子A的谱函数,那么

$$\tilde{E}_\lambda=UE_\lambda U^{-1}$$

也是单位分解. 令 $\tilde{B}$ 代表由单位分解 $\tilde{E}_\lambda$ 所构成的自伴算子. 我们有

$$\tilde{B}x=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d\tilde{E}_\lambda x=\lim\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lambda_k\tilde{E}(\Delta_k)x$$

$$=\lim\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lambda_k UE(\Delta_k)U^{-1}x$$

$$=U\left(\lim\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lambda_k E(\Delta_k)\right)U^{-1}x$$

$$= U\left(\int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda\right) U^{-1}x = UAU^{-1}x = Bx.$$

因此

$$\tilde{E}_\lambda = UE_\lambda U^{-1}$$

是与算子 A 保范等价的算子 B 的谱函数．由此特别可知算子 A 和 B 的谱重合．在我们讨论的 $A = i\dfrac{d}{dt}$ 和 $B = t$ 的具体例中，我们断定算子 A 有充满整个实轴纯连续谱．

对算子 A 的函数我们得出如下表现

$$F(A)x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{i\xi\tau}d\tau\right\} e^{-it\xi}d\xi$$

$$= U^{-1}F(B)Ux.$$

特别，算子 A 的谱函数可以表成

$$E_\lambda x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\lambda}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{i\xi\tau}d\tau\right\} e^{-it\xi}d\xi.$$

上面建立的微分算子与乘以自变量的乘法算子之间的保范等价性并不是微分算子所独具有的．事实上，对任一自伴算子总可以把整个空间分解为两两正交的不变子空间，在每一个这样子空间上我们所考虑的算子总保范等价于在 $(-\infty,\infty)$ 内以某一 $\rho(t)$ 为权的平方可和函数所成的空间内的乘以自变量的乘法算子．

第八章　线性赋范空间内微分学与积分学的某些问题

我们在本章考虑线性赋范空间内微分运算和积分运算并讲述它们的几个应用.

§1　数值变量的抽象函数的微分法与积分法

设 E 为一线性赋范空间且 R 为数直线上一个点集，一般说来映 R 于 E 的一个非线性的算子 $x = x(t)$ 以后称为**数值变量 t 的抽象函数**. 这样的函数常常在分析以及其应用中遇到. 例如在微分几何中出现的数值变量的矢量函数，微分方程的一参数系的解的全体，算子族，如依赖于参数的积分算子等：都是这样的抽象函数的例子. 以后为了简单可设 R 为数直线上的区间 $[a,b]$.

显然，数值变量的抽象函数可以相加，可以乘以实数. 即它构成线性空间.

函数 $x(t)$ 称为在区间 $[a, b]$ 的点 t_0 **是连续的**，如果任与 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta = \delta(t_0,\varepsilon)$ 使得

$$\|x(t) - x(t_0)\| < \varepsilon$$

对 $t \in [a,b]$ 且 $|t - t_0| < \delta$.

函数如果在区间 $[a, b]$ 的每一点连续，那么有如通常，我们说它**在区间** $[a,b]$ **连续**.

显然，函数的加法运算以及数乘法运算不超出连续函数

类的范围.

函数 $x(t)$ 称为在 $[a, b]$ 一致连续的，如果任与 $\varepsilon > 0$，可定 δ 使得对满足 $|t_1 - t_2| < \delta$ 的 $[a, b]$ 内的任意 t_1 和 t_2 总有

$$\|x(t_1) - x(t_2)\| < \varepsilon.$$

引理 1 如果函数 $x = x(t)$ 在闭区间 $[a,b]$ 内连续，那么它在此区间内一致连续.

考虑数值函数 $\varphi(t,\tau)$，它在正方形 $a \leqslant t, \tau \leqslant b$ 内由等式

$$\varphi(t,\tau) = \|x(t) - x(\tau)\|$$

定义. 不难看出此函数在闭正方形内连续，从而在其内一致连续. 因此任与 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 使得对正方形 $a \leqslant t$, $t \leqslant b$ 内满足 $|t_1 - t_2| < \delta, |\tau_1 - \tau_2| < \delta$ 的任意点 (t_1,τ_1) 和 (t_2, τ_2) 总有

$$|\varphi(t_1,\tau_1) - \varphi(t_2,\tau_2)| < \varepsilon. \tag{1}$$

令

$$\tau_1 = t_1, \quad \tau_2 = t_2$$

其中

$$|t_1 - t_2| < \delta.$$

再注意到

$$\varphi(t_2,t_2) = \|x(t_2) - x(t_2)\| = 0$$

所以由 (1) 可得

$$|\varphi(t_1,t_2)| = \|x(t_1) - x(t_2)\| < \varepsilon$$

对 $|t_1 - t_2| < \delta$. 这就证明了 $x(t)$ 的一致连续性.

不难证明，在 $[a,b]$ 上连续的函数在此区间上有界(即函数值 $x(t), t \in [a,b]$ 的集是空间 E 的有界集).

微分法 考虑函数 $x = x(t)$，式中 $t \in [a, b]$，$x \in E$. 用下述等式定义导数 $x'(t)$：

$$\frac{dx(t)}{dt} = x'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \tag{2}$$

如果右边极限在空间E的收敛意义下存在．我们有

$$x'(t)=\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}-\alpha(t,\Delta t),$$

式中 $$\alpha(t,\Delta t)\to 0 \text{ 对 } \Delta t\to 0.$$

因此 $$x(t+\Delta t)-x(t)=x'(t)\Delta t+\alpha(t,\Delta t)\Delta t. \tag{3}$$

对 $\Delta t\to 0$，(3)式右边趋近于零．由此可知，如果$x(t)$在点t有导数，那么它在该点连续．

容易建立微分法的下述性质：

1) $[x(t)+y(t)]'=x'(t)+y'(t)$,

2) $[\lambda x(t)]'=\lambda x'(t)$ 对任意数值因子λ,

3) 设对元 $x\in E_x$ 定义了左(或右)乘以元 $y\in E_y$ 的运算，并设这个乘法是连续的，关于加法可分配的且和数值因子的乘法是可换的．那么

$$[yx(t)]'=yx'(t), \tag{4}$$

即常值因子可以提出微分记号之外．

性质1)和2)是显然的． 性质3)由左乘运算的连续性和可分配性得出．即是说

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[yx(t)]&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{yx(t+\Delta t)-yx(t)}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}y\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\\&=y\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\\&=y\frac{dx(t)}{dt}.\end{aligned}$$

同理 $$[x(t)y]'=x'(t)y. \tag{5}$$

例．设 $x=x(t)$，$x\in E$，且A是 $(E_x\to E_y)$ 内算子，于是

$$[Ax(t)]' = Ax'(t). \tag{6}$$

又设 $A = A(t) \in (E_x \to E_y)$ 且 $x \in E_x$.

于是

$$[A(t)x]' = A'(t)x. \tag{7}$$

特别对线性泛函有

$$\{f[x(t)]\}' = f[x'(t)] \tag{8}$$

$$[f(t)x]' = f'(t)x. \tag{9}$$

高阶导数 现在我们来定义高阶导数. 可以给出函数 $x = x(t)$ 在点 t 的 n 阶导数 $x^{(n)}(t)$ 以两个定义类似于数值变量的数值函数的情形[1]

1. 设

$$\Delta_{\Delta t}^n x(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k x(t + k\Delta t),$$

式中 C_n^k 为二项系数. $\Delta_{\Delta t}^n x(t)$ 称为 $x(t)$ 在点 t 的 n 阶差.
相应地,

$$\delta_{\Delta t}^n x(t) = \Delta_{\Delta t}^n x\left(t - \frac{n}{2}\Delta t\right)$$

称为 n 阶中心差.

表达式

$$x^{(n)}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{(\Delta t)^n} \delta_{\Delta t}^n x(t) \tag{10}$$

在极限存在的假设下,称为函数 $x(t)$ 在点 t 的 n 阶差导数.

如果公式(10)的极限趋近在每一点 t 的一个邻域内一致地成立,那么 $x^{(n)}(t)$ 称为 n 阶一致差导数.

2. n 阶累次导数 $x^{(n)}(t)$. 定义为函数 $x(t)$ 的 n 次继续微分的结果:

---

1) 见附录 IV.

$$x'(t)_0 = \frac{d}{dt}x(t), \quad x''(t)_0 = \frac{d}{dt}x'(t)_0, \cdots$$

$$\cdots \quad x^{(n)}(t)_0 = \frac{d}{dt}x^{(n-1)}(t)_0.$$

定理 1 如果在点 t 的邻域内存在连续 n 阶累次导数 $x^{(n)}(t)_0$，那么在此邻域内存在 n 阶一致差导数 $x^{(n)}(t)$，而且

$$x^{(n)}(t) = x^{(n)}(t)_0.$$

反之，如果在 t 的邻域内存在一致连续的一致差导数，那么在此邻域存在与之相等的 n 阶累次导数 $x^{(n)}(t)_0$.

因为这些论断对数值函数是成立的[1]，转到抽象函数的情形可借助于在泛函分析中常用的方法而告完成 .

对任一线性泛函 $f\in E^*$，那么

$$\phi(t) = f[x(t)]$$

为数值函数，而且由(8)

$$f[x'(t)_0] = \{f[x(t)]\}' = \varphi'(t),$$
$$f[x''(t)_0] = \{f[x'(t)_0]\}' = \varphi''(t)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f[x^{(n)}(t)_0] = \varphi^{(n)}(t).$$

此外

$$f\left[\frac{1}{(\Delta t)^n}\delta^n_{\Delta t}x(t)\right]$$

$$= \frac{1}{(\Delta t)^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k\varphi\left(t+\left(k-\frac{n}{2}\right)\Delta t\right)$$

$$= \frac{1}{(\Delta t)^n}\delta^n_{\Delta t}\varphi(t) = \varphi^{(n)}(t+\theta\Delta t)$$

$$= f[x^{(n)}(t+\theta\Delta t)_0]^{2)},$$

1) 见附录 IV.

2) 见附录 IV.

式中 $-\frac{n}{2}<\theta<\frac{n}{2}$. 因为 $x^{(n)}(t)_0$ 依假设在点 t 的某一邻域连续，所以

$$\|x^{(n)}(t+\theta\Delta t)_0 - x^{(n)}(t)_0\| < \varepsilon.$$

只要 $\Delta t \to 0$ 时，在 t 点邻域内一致地趋于零.

由此

$$\left| f\left[\frac{1}{(\Delta t)^n}\delta^n_{\Delta t}x(t)\right] - f[x^{(n)}(t)_0]\right| < \varepsilon\|f\|. \qquad (11)$$

等式(11)既然对任一 $f\in E^*$ 成立，所以

$$\left\|\frac{1}{(\Delta t)^n}\delta^n_{\Delta t}x(t) - x^{(n)}(t)_0\right\| < \varepsilon$$

从而

$$x^{(n)}(t)_0 = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{(\Delta t)^n}\delta^n_{\Delta t}x(t),$$

而且此极限趋近在所考虑的每一点的邻域内是一致的. 这就是所要证明的.

偏导数 我们介绍抽象函数的偏导数的概念.

考虑在线性赋范空间 E 取值的 n 个数值变量 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 的函数 $x = x(t_1,t_2,\cdots,t_n)\in E$. 我们可以把 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 看做 n 维矢量 $\bar{t} = \sum_{i=1}^{n} t_i e_i$ 的分量，式中 e_i 为相互正交单位 n 维矢量.

把 $x = x(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ 看成在 n 维矢量函数时，我们可以定义它在点 $\bar{t}_0 = \sum_{i=1}^{n} t_i^0 e_i$ 的 n 阶混合差导数

$$\frac{\partial^n}{\partial t_1\partial t_2\cdots\partial t_n}x(t_1,t_2,\cdots,t_n).$$

为此我们构造 n 阶混合差

$$\Delta^n_{t_1,\cdots,t_n;\Delta t}x(\bar{t}_0)$$

$$=\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_k}(-1)^{n-k}x[\bar{t}_0+\Delta t(e_{i_1}+e_{i_2}+\cdots+e_{i_k})],$$

在此 $(i_1, i_2, \cdots, i_k)$, $0\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的某一子集，而且和是关于所有这样子集而取的. 在点 $\bar{t}_0$ 的**中心** n **阶混合差**

$$\delta^n_{t_1,t_2,\cdots,t_n,\Delta t}x(\bar{t}_0)$$

是在点

$$\bar{\tau}_0=\bar{t}_0-\frac{1}{2}\Delta t\sum_{i=1}^{n}e_i$$

取的 n 阶混合差，即

$$\delta^n_{t_1,t_2,\cdots,t_n,\Delta t}x(\bar{t}_0)=\Delta^n_{t_1,t_2,\cdots t_n;\Delta t}x\left(\bar{t}_0-\frac{1}{2}\Delta t\sum_{i=1}^{n}e_i\right).$$

于是函数 $x(\bar{t})$ 在点 $\bar{t}_0=(t_1^0, t_2^0, \cdots, t_n^0)$ 的 n **阶混合差导数**

$$\frac{\partial^n}{\partial t_1\partial t_2,\cdots\partial t_n}x(t_1^0, t_2^0, \cdots, t_n^0)$$

是指 $\Delta t\to 0$ 时商

$$\frac{1}{(\Delta t)^n}\delta^n_{t_1,t_2,\cdots,t_n,\Delta t}x(\bar{t}_0)$$

的极限，如果这个极限存在的话.

与此同时，可以定义 n 阶混合累次导数，这是函数 $x(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 继续依 t_{k_n}, 依 $t_{k_{n-1}}$, $\cdots$ 最后依 t_{k_1} 的微分，式中 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 是下标 $1, 2, \cdots, n$ 的任一排列，在此假设所得导数

$$\frac{\partial}{\partial t_{k_n}}x(t_1, t_2, \cdots, t_n),\ \frac{\partial}{\partial t_{k_{n-1}}}\left(\frac{\partial}{\partial t_{k_n}}x(t_1, t_2, \cdots, t_n)\right),\cdots$$

$$\frac{\partial}{\partial t_{k_1}}\left\{\frac{\partial}{\partial t_{k_2}}\left[\cdots\frac{\partial}{\partial t_{k_n}}x(t_1,t_2,\cdots,t_n)\cdots\right]\right\}$$

在 $\bar{t}_0$ 的某一邻域存在.

定理 2 如果在点 $\bar{t}_0=(t_1^0,t_2^0,\cdots,t_n^0)$的某一邻域存在函数 $x(t)$ 的一个 n 阶混合累次导数，而且此导数在 $\bar{t}_0$ 点连续，那么在这一点存在 n 阶混合差导数，而且这两个导数相等.

设 f 为 E^* 内任一泛函. 那么

$$\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n)=f[x(t_1,t_2,\cdots,t_n)]$$

是 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 的数值函数[1],因此

$$\frac{1}{(\Delta t)^n}\delta^n_{t_1,t_2,\cdots,t_n;\Delta t}\varphi(t_1^0,t_2^0,\cdots,t_n^0)$$

$$=\frac{\partial}{\partial t_{k_1}}\left\{\cdots\frac{\partial}{\partial t_{k_n}}\varphi(t_1^0+\theta_1\Delta t,\cdots,t_n^0+\theta_n\Delta t)\cdots\right\},$$

$$0<\theta_i<1, i=1,2,\cdots,n$$

对下标 $1,2,\cdots,n$ 的任意排列 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 成立. 从而

$$f\left[\frac{1}{(\Delta t)^n}\delta^n_{t_1,t_2,\cdots,t_n;\Delta t}x(t_1^0,\cdots,t_n^0)\right]$$

$$=\frac{1}{(\Delta t)^n}\delta^n_{t_1,t_2,\cdots,t_n;\Delta t}\varphi(t_1^0,\cdots,t_n^0)$$

$$=\frac{\partial}{\partial t_{k_1}}\left\{\cdots\frac{\partial}{\partial t_{k_n}}\varphi(t_1^0+\theta_1\Delta t,\cdots,t_n^0+\theta_n\Delta t)\cdots\right\}$$

$$=f\left[\frac{\partial}{\partial t_{k_1}}\left\{\cdots\frac{\partial}{\partial t_{k_n}}x(t_1^0+\theta\Delta t,\cdots)\cdots\right\}\right],$$

这是因为线性泛函 f 可以提到微分记号之外. 依假设 $x(\bar{t})$的 n 阶混合累次导数在 $\bar{t}_0$ 连续,因此

1) 见附录 IV.

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t_{k_1}} \left\{ \cdots \frac{\partial}{\partial t_{k_n}} x(t_1^0 + \theta_1 \Delta t, \cdots, t_n^0 + \theta_n \Delta t) \cdots \right\} - \frac{\partial}{\partial t_{k_1}} \left\{ \cdots \frac{\partial}{\partial t_{k_n}} x(t_1^0, \cdots, t_n^0) \cdots \right\} \right\| < \varepsilon$$

如果 Δt 取得充分小。由此

$$\begin{aligned} & \left| f\left[\frac{1}{(\Delta t)^n} \delta^n_{t_1, t_2, \cdots t_n, \Delta t} x(\bar{t}_0) \right] - f\left[\frac{\partial}{\partial t_{k_1}} \left\{ \cdots \frac{\partial}{\partial t_{k_n}} x(\bar{t}_0) \cdots \right\} \right] \right| \\ = & \left| f\left[\frac{\partial}{\partial t_{k_1}} \left\{ \cdots \frac{\partial}{\partial t_{k_n}} x(t_1^0 + \theta_1 \Delta t, \cdots, t_n^0 + \theta_n \Delta t) \cdots \right\} \right] - f\left[\frac{\partial}{\partial t_{k_1}} \left\{ \cdots \frac{\partial}{\partial t_{k_n}} x(t_1^0, \cdots, t_n^0) \cdots \right\} \right] \right| \\ \leqslant & \|f\| \left\| \frac{\partial}{\partial t_{k_1}} \left\{ \cdots \frac{\partial}{\partial t_{k_n}} x(t_1^0 + \theta_1 \Delta t, \cdots, t_n^0 + \theta_n \Delta t) \cdots \right\} - \frac{\partial}{\partial t_{k_1}} \left\{ \cdots \frac{\partial}{\partial t_{k_n}} x(t_1^0, \cdots, t_n^0) \cdots \right\} \right\| \leqslant \|f\| \varepsilon. \end{aligned}$$

这个不等式对任一 $f \in E^*$ 成立，所以

$$\left\| \frac{1}{(\Delta t)^n} \delta^n_{t_1, t_2, \cdots, t_n, \Delta t} x(\bar{t}_0) - \frac{\partial}{\partial t_{k_1}} \left\{ \cdots \frac{\partial}{\partial t_{k_n}} x(\bar{t}_0) \cdots \right\} \right\| < \varepsilon.$$

由此可知

$$\frac{1}{(\Delta t)^n} \delta^n_{t_1, t_2, \cdots, t_n, \Delta t} x(\bar{t}_0) \to \frac{\partial}{\partial t_{k_1}} \left\{ \cdots \frac{\partial}{\partial t_{k_n}} x(\bar{t}_0) \cdots \right\}$$

对 $\Delta t \to 0$，这就证明了

$$\frac{1}{(\Delta t)^n} \delta^n_{t_1, t_2, \cdots, t_n, \Delta t} x(\bar{t}_0)$$

的极限存在而且等于 n 阶混合累次导数。

推论 对应于下标$1,2,\cdots,n$ 的两个不同排列的 n 阶混合累次导数在共有的连续点上其值相等.

简言之，n 阶混合累次导数不依赖于微分的顺序.

事实上,在此情形下有

$$\frac{\partial}{\partial t_{k_1}}\left\{\cdots\frac{\partial}{\partial t_{k_n}}x(t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n)\cdots\right\}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{(\Delta t)^n}\,\delta^n_{t_1,t_2,\cdots,t_n;\Delta t}x(t_1,\ \cdots,t_n),$$

而右端不依赖于排列 $k_1,k_2,\cdots,k_n$.

以后当我们谈到定义在某一区域的 n 阶混合导数时，我们总假设它在此区域连续，从而它的两个定义一致而且记号

$$\frac{\partial^n}{\partial t_1\partial t_2\cdots\partial t_n}x(t_1,\cdots,t_n)$$

代表这个导数.

积分法 以前在谱理论中我们考虑过 Stieltjes 型的抽象积分. 然而在那里被积函数通常是实变数的实或复函数，而积分函数则为抽象的. 现在反过来，我们考虑被积函数为抽象的而积分函数则为实变数的积分法. 有如谱理论情形，我们仅限于连续函数的 Riemann 积分*).

设 $x=x(t)$, $a\leqslant x\leqslant b, x\in E$ 为抽象函数. 我们考虑把区间 $[a,b]$ 分割为闭区间 $[t_i,t_{i+1}]$ 的所有可能分割

$$A=[t_0,\ t_1,\cdots,t_n]$$

其中

$$t_0=a<t_1<\cdots<t_n=b.$$

分割 $B=[s_0,s_1,\cdots,s_m]$ 称为分割 $A=[t_0,t_1,\cdots,t_n]$

*) 在许多应用上要考虑的是在 Banach 空间取值的所谓强可测函数的类似于 Lebesgue 积分的 Bochner 积分. ——译者注

的细分，如果每一 $[s_k, s_{k+1}]$ 总是区间 $[t_i, t_{i+1}]$ 之一的一部分。对分割 B 来说分割 A 的每一区间 $[t_i, t_{i+1}]$ 也分割成了分割 B 的区间 $[s_k, s_{k+1}]$。如果分割 A 的所有区间 $[t_i, t_{i+1}]$ 的长不超过正数 δ：$t_{i+1}-t_i \leqslant \delta$，那么 A 称 $[a, b]$ 的 δ-分割，并记作 A_δ。

我们称

$$S(A, x(t)) = \sum_{i=0}^{n-1} x(t_i)(t_{i+1}-t_i) \tag{12}$$

为抽象函数 $x(t)$ 关于分割 $A=[t_0, t_1, \cdots, t_n]$ 的积分和.

我们考虑函数 $x(t), t\in[a,b], x\in E$，其中 E 是完备的。我们也考虑 $[a, b]$ 的 δ_n-分割序列 $\{A_{\delta_n}\}$ 满足 $n\to\infty$ 时 $\delta_n\to 0$。我们构造积分和 $S(A_{\delta_n}, x(t))$。如果 $n\to\infty$ 时此积分和序列趋近于极限

$$S = \lim_n S(A_{\delta_n}, x(t)),$$

而且此极限不依赖于分割列 A_{δ_n} 的选择，那么这个极限称为函数 $x(t)$ 在区间 $[a, b]$ 上的 Riemann 积分并用 $\int_a^b x(t)dt$ 代表.

定理 3 若 $x(t)$ 在区间 $[a,b]$ 连续，那么 Riemann 积分 $\int_a^b x(t)dt$ 存在.

这个定理的证明基于下述两个引理.

引理 2 如果 $[a, b]$ 的分割 B 是它的 δ-分割 $A=A_\delta$ 的细分，那么

$$\|S(A, x(t)) - S(B, x(t))\| \leqslant \omega(\delta)(b-a), \tag{13}$$

式中
$$\omega(\delta) = \sup_{|\tau_1-\tau_2|\leqslant\delta} \|x(\tau_1)-x(\tau_2)\|. \tag{14}$$

若 t 属于 δ-分割 A 的区间 $[t_i, t_{i+1}]$，那么

$$|t - t_i| \leqslant |t_{i+1} - t_i| \leqslant \delta.$$

因此由(14)

$$\|x(t) - x(t_i)\| \leqslant \omega(\delta). \tag{15}$$

论 n 是分割 A 的区间 $[t_i, t_{i+1}]$ 的个数，m 是分割 B 的区间 $[s_j, s_{j+1}]$ 的个数．因为分割 B 是分割 A 的细分，所以每一点 $t_i, i = 1, 2, \cdots, n$ 与点 s_j 之一重合，$s_{k_i} = t_i$（在此 $0 = k_0 < k_1 < \cdots < k_n = m$, $m > n$）．因此分割 A 的区间 $[t_i, t_{i+1}]$ 分割为分割 B 的 $k_{i+1} - k_i$ 个区间 $[s_j, s_{j+1}]$，$j = k_i, k_i + 1, \cdots, k_{i+1} - 1$．对这些 j 的值由(15)有

$$\|x(s_j) - x(t_i)\| \leqslant \omega(\delta)$$

因此

$$S(A, x(t)) = \sum_{i=0}^{n-1} x(t_i)(t_{i+1} - t_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} x(t_i) \sum_{j=k_i}^{k_{i+1}-1} (s_{j+1} - s_j),$$

$$S(B, x(t)) = \sum_{j=0}^{n-1} x(s_j)(s_{j+1} - s_j)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=k_i}^{k_{i+1}-1} x(s_j)(s_{j+1} - s_j),$$

$$\|S(A, x(t)) - S(B, x(t))\|$$

$$= \left\| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=k_i}^{k_{i+1}-1} [x(t_i) - x(s_j)] (s_{j+1} - s_j) \right\|$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=k_i}^{k_{i+1}-1} \|x(t_i) - x(s_j)\| (s_{j+1} - s_j)$$

$$\leqslant \omega(\delta) \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=k_i}^{k_{i+1}-1} (s_{j+1} - s_j) = \omega(\delta)(b-a) \tag{16}$$

这就是所要证明的.

引理 3 设 A_δ 和 A_ε 是 $[a,b]$ 的任意 δ 和 ε 分割. 那么

$$\|S(A_\delta,x(t))-S(A_\varepsilon,x(t))\| \leqslant (\omega(\delta)+\omega(\varepsilon))(b-a).$$

事实上, 常可选择 $[a, b]$ 的这样分割 B 它同时为 A_δ 和 A_ε 的细分. 因此由(13)

$$\|S(A_\delta,x(t))-S(B,x(t))\| \leqslant \omega(\delta)(b-a),$$
$$\|S(A_\varepsilon,x(t))-S(B,x(t))\| \leqslant \omega(\varepsilon)(b-a),$$

由此

$$\|S(A_\delta,x(t))-S(A_\varepsilon,x(t))\| \leqslant (\omega(\delta)+\omega(\varepsilon))(b-a),$$

这就是所要证明的.

现在来证明定理. 讨论 $[a,b]$ 的 δ_n-分割序列 $\{A_{\delta_n}\}$, 其中 $\delta_n\to 0$ 对 $n\to\infty$. 对于对应的积分和 $S(A_{\delta_n}, x(t))$ 由引理 3 有不等式

$$\|S(A_{\delta_n},x(t))-S(A_{\delta_{n+p}},x(t))\| \leqslant (\omega(\delta_n)+\omega(\delta_{n+p}))(b-a),$$

而且由函数 $x(t)$ 的一致连续性知上面不等式右端当 $n\to\infty$ 时趋近于零. 这就是说, 序列 $\{S(A_{\delta_n}, x(t))\}$ 自收敛. 但 $S(A_{\delta_n},x(t))\in E$ 且 E 为完备的, 所以这个序列在 E 有极限 S.

今设给定 $[a, b]$ 的另外 ε_n-分割序列 $\{A_{\varepsilon_n}\}$ 且 $\varepsilon_n\to 0$. 由于前述 $\{S(A_{\varepsilon_n}, x(t))\}$ 对 $n\to\infty$ 收敛于某一极限 S_ε. 我们证明 $S_\varepsilon=S$.

事实上, 结合这两个分割序列为一个序列 $A_{\delta_1}, A_{\varepsilon_1}, A_{\delta_2}, A_{\varepsilon_2}, \cdots$. 对应于这个序列的积分和

$$S(A_{\delta_1}, x(t)), \quad S(A_{\varepsilon_1}, x(t)), \cdots$$

构成收敛序列且具有极限 $S_{\delta+\varepsilon}$ 等于子序列 $\{S(A_{\delta_n},x(t))\}$ 和 $\{S(A_{\varepsilon_n},x(t))\}$ 的极限 S 和 S_ε. 从而

$$S=S_\varepsilon=S_{\delta+\varepsilon}.$$

定理证完.

我们称 S 为 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上的积分并用

$$\int_a^b x(t)dt$$

代表它.

积分运算的性质

1. $\int_a^b [x(t)+y(t)]dt=\int_a^b x(t)dt+\int_a^b y(t)dt.$

2. 若 c 为 a 和 b 之间任一点,那么

$$\int_a^b x(t)dt=\int_a^c x(t)dt+\int_c^b x(t)dt.$$

3. 对常数因子 λ

$$\int_a^b \lambda x(t)dt=\lambda\int_a^b x(t)dt.$$

积分的性质1—3是显然的.

4.
$$\left\|\int_a^b x(t)dt\right\|\leqslant\int_a^b \|x(t)\|dt. \tag{17}$$

事实上,对分割 $A_\delta=[t_0,t_1,\cdots,t_n]$ 有

$$\begin{aligned}\|S(A_\delta,x(t))\|&=\left\|\sum_{i=0}^{n-1}x(t_i)(t_{i+1}-t_i)\right\|\\&\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}\|x(t_i)\|(t_{i+1}-t_i)\\&=S(A_\delta,\|x(t)\|)\end{aligned} \tag{18}$$

对 $\delta\to 0$ 积分和依次趋于积分

$$\int_a^b x(t)dt \quad 和 \quad \int_a^b \|x(t)\|dt$$

且不等式(18)变为(17).

5. 如果对元 $x\in E_x$ 定义了右(或左)乘以元 $y\in E_y$ 的运算,那么

$$\int_a^b x(t)y\,dt = \int_a^b x(t)dt\,y \tag{19}$$

(常量因子 y 可以提到积分符号外边).

事实上,对 δ-分割 $A_\delta = [t_0, t_1, \cdots, t_n]$ 我们有

$$\begin{aligned} S(A_\delta, x(t)y) &= \sum_{i=0}^{n-1} x(t_i)y(t_{i+1} - t_i) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} x(t_i)(t_{i+1} - t_i)\right)y \\ &= S(A_\delta, x(t)y). \end{aligned} \tag{20}$$

令 $\delta \to 0$, 等式(20)的左边和右边依次趋近于等式的左边和右边.

同理对于左乘有类似等式

$$\int_a^b yx(t)dt = y\int_a^b x(t)dt. \tag{21}$$

例 1. 设 A 是线性有界算子映 E_x 于 E_y, 且 $x(t) \in E_x$, 那么

$$\int_a^b Ax(t)dt = A\int_a^b x(t)dt.$$

例 2. 设 $A = A(t)$ 是 $(E_x \to E_y)$ 内算子且连续依赖于 t. 又设 $x \in E_x$, 那么

$$\int_a^b A(t)x\,dt = \left(\int_a^b A(t)dt\right)x.$$

在第一例中算子 A 是常量左乘因子, 在第二例中元 x 是常量右乘因子.

特别若 f 是属于 E^* 内的一个线性泛函, 那么

$$f\left(\int_a^b x(t)dt\right) = \int_a^b f[x(t)]dt, \quad \int_a^b f(t)x\,dt = \left(\int_a^b f(t)dt\right)x. \tag{22}$$

6. 若函数 $x=x(t)$, $t\in[a,b]$, $x\in E$ 关于 t 有连续导数

$$x'(t)=\frac{d}{dt}x(t),$$

那么

$$\int_a^b x'(t)dt=x(b)-x(a). \tag{23}$$

事实上,对任一线性泛函 f 由 (22) 有

$$f\left(\int_a^b x'(t)dt\right)=\int_a^b f[x'(t)]dt=\int_a^b \frac{d}{dt}f[x(t)]dt.$$

但 $f[x(t)]$ 是连续数值函数,对于它有

$$\int_a^b \frac{d}{dt}f[x(t)]dt=f[x(b)]-f[x(a)].$$

因此

$$f\left(\int_a^b x'(t)dt\right)=f[x(b)]-f[x(a)]. \tag{24}$$

等式(24)既然对任一线性泛函 f 成立,所以 (23) 成立. 这就是所要证明的.

最后我们考虑变动上限的积分. 设 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 连续且 $a<t<b$.

那么存在

$$y(t)=\int_a^t x(t)d\tau,$$

$y(t)$ 为某一抽象函数.

7. 具有变动上限的连续抽象函数 $x(t)$的积分是积分上限的可微抽象函数且

$$\left(\int_a^t x(\tau)d\tau\right)'=x(t).$$

显然有

$$y(t+\Delta t)-y(t)=\int_t^{t+\Delta t}x(\tau)d\tau$$

且

$$x(t)=\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}x(t)d\tau.$$

由此

$$\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}-x(t)$$

$$=\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}[x(\tau)-x(t)]d\tau.$$

任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使 $\|x(t_1)-x(t_2)\|<\varepsilon$ 对 $|t_1-t_2|<\delta$. 因此若 $|\Delta t|<\delta$ 我们有

$$\left\|\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}-x(t)\right\|$$

$$\leqslant\frac{1}{|\Delta t|}\left|\int_t^{t+\Delta t}\|x(\tau)-x(t)\|dt\right|$$

$$<\varepsilon\frac{1}{|\Delta t|}\left|\int_t^{t+\Delta t}dt\right|=\varepsilon.$$

最后这个不等式是说

$$y'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}$$

存在且

$$y'(t)=x(t),$$

解微分方程 考虑微分方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x) \tag{25}$$

其中 x 和 $f(t,x)$ 是完备赋范空间 E 的元且 $t\in[a,b]$. 我们设 $f(t,x)$ 关于 t 连续而且作为 x 的函数满足 Lipschitz 条件：

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leqslant L\|x_1 - x_2\|. \quad (26)$$

用 $C^E[a,b]$ 代表定义在 $[a, b]$ 上且在 E 取值的所有连续函数 $x(t), t \in [a,b], x(t) \in E$ 的全体.

在空间 $C^E[a,b]$ 内引入范数,令

$$\|x\|_c = \max_t \|x(t)\|.$$

和 E 一样, $C^E[a, b]$ 也是完备空间. 这个论断的证明和对其特殊情形 $E = R, C^E[a, b] = C[ab]$ 的证明完全一样.

随方程(25)我们考虑方程

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau (a \leqslant t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \delta \leqslant b). \quad (27)$$

此方程右端用 $A_t(x)$ 代表. $A_t(x)$是一算子,变换 $C^E[t_0, t_0 + \delta]$ 的元 $x = x(t)$ 于同一空间的另一元. 我们有

$$\|A_t[x(t)] - A_t[y(t)]\| = \left\|\int_{t_0}^{t} [f(\tau, x(t)) - f(\tau, y(t))]d\tau\right\| \leqslant \int_{t_0}^{t_0+\delta} \|f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau))\|d\tau.$$

从而由(26)

$$\|A(x) - A(y)\|_C \leqslant L\int_{t_0}^{t_0+\delta} \|x(\tau) - y(\tau)\|d\tau \leqslant L\delta \max_t \|x(t) - y(t)\| = L\delta\|x - y\|_C. \quad (28)$$

如果 $L\delta < 1$, 那么由(28)知算子 A 给出空间 $C^E[t_0, t_0 + \delta]$ 到其自身的压缩映象. 由此存在方程(27)的唯一解(见 §7).

方程(27)等价于具有初值条件 $x(t_0) = x_0$ 的方程(25). 从而方程(25)在区间 $[t_0, t_0 + \delta]$有唯一一个满足 $x(t_0) = x_0$ 的解.

特别,对任意初值 $x(a)=x_0$, 此方程在 $[a, a+\delta]$ 上有唯一解 $x(t)$. 这个解可以延拓到整个区间 $[a,b]$. 事实上,若 $a+\delta<b$, 且 $x(a+\delta)=x_1$,那么在区间 $[a+\delta, a+2\delta]$ 上重复上述方法可以构造一个具有初值 x_1 的解,照此类推.

例 1. 若 E 为 n 维线性空间,那么得出通常 n 个微分方程的组的存在定理.

例 2. 若 E 为空间 l_p, c, m 等,那么得出无限微分方程组的解的存在的证明.

§2 差分格式与 Lax 定理

用有限差分法近似求解数学物理方程的边值问题时,我们遇见了这样情况,即在某些情况下,收敛过程对自变量差分任意趋近于零时不成立. 此外,对解差分边值问题在逐次计算未知函数的值时出现任意大的误差致使不可能用差分方程的解代替微分方程的解. 因此对解波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

的 Cauchy 问题代以差分方程

$$u_{t\bar{t}}=u_{x\bar{x}},$$

式中 $u_{t\bar{t}}$ 和 $u_{x\bar{x}}$ 代表依对应变量的二阶对称差分时,则仅当独立变量的差商 $\dfrac{\Delta t}{\Delta x}$ 不超过一时我们得出收敛. 完全同理,若对传热的边值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x,0)=\varphi(x)\quad 0\leqslant x\leqslant l,$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0$$

代以差分格式

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t} = \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{(\Delta x)^2},$$

$$u_m^0 = \varphi(m\Delta x), u_0^n = u_M^n = 0 \quad \begin{pmatrix} m = 1, 2, \cdots, M \\ n = 0, 1, 2, \cdots \end{pmatrix},$$

式中 $u_k^n = u(k\Delta x, n\Delta t)$，而且继续用 u_m^n 定义 u_m^{n+1} 时我们将得出当 $\frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} > 1$ 时这样的误差积累使不可能应用所指的格式。

我们将证明这两个现象是密切联系的。下面我们对最简单的情形来研究 Lax 在这个方面的结果[28]。

设 $x = x(t), 0 \leqslant t \leqslant T$ 为在 Banach 空间 E 取值的抽象函数。设 A 为作用于此空间内的线性算子，具有稠密定义域。$D(A)$。算子 A 可能是无界的。此外设 x_0 为空间 E 的一个固定元。我们考虑方程

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{1}$$

$$x(0) = x_0 \tag{2}$$

这个问题的解我们认为是抽象函数 $x(t)$ 使得

1) $x(t) \in D(A)$ 对所有 $t \in [0, T]$

2) 差商 $$\frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

当 $h \to 0$ 时在整个区间 $[0, T]$ 上一致收敛于 $x'(t)$，

3) $x(t)$ 满足方程 (1) 和初值条件 (2)*)。

---

*) A 的定义域 $D(A)$ 往往由 E 内满足某些边界条件的函数 $x(t)$ 所组成。——译者注

设对某些 x_0 存在问题(1)—(2)的唯一解. 不难验证这样的 x_0 的集 $D(R)$ 是一线性流形. 对每一 t, 对于元 $x_0 \in D(R)$ 有满足条件 1)—3) 的唯一元 $x(t)$ 与之对应, 这样我们就导致一个算子 $R_0(t)$ 由等式

$$x(t) = R_0(t)x_0,\ R_0(0)x_0 = x_0\ (0 \leqslant t \leqslant T),$$

定义,而它给出我们考虑的问题的解. 由于算子 A 是线性的, 算子 $R_0(t)$ 对所有 t 也是线性的. 此外我们也假设 $R_0(t)x \to x$ 对 $t \to 0$ 和 $x \in D(R)$. 我们说, 已知问题是适定的如果 $D(R)$ 在 E 稠密而且算子族 $R_0(t)$ 关于 t 在 $D(R)$ 上一致有界. 显然, 这个适定性的定义与数学物理中普遍的适定性定义一致.

在以上关于算子 $R_0(t)$ 所作的假设下, 我们可对每一 t 依连续性扩张 $R_0(t)$ 于线性算子 $R(t)$ 定义于整个空间 E 上. 抽象函数 $x(t) = R(t)x_0$ 称为由初值 $x_0 \in D(R)$ 定义的问题(1)—(2)的广义解. 注意算子族在区间 $[0, T]$ 上也是一致有界的. 此外对 $t \to +0$, $R(t) \to 1$ 在按点收敛意义下成立.

我们再作一个假定. 我们设, 如果由初值 x_0 出发在点 $t = t_0$ 确定解 $x(t)$, 然后把 $x(t_0)$ 看作初值由它出发再对 $t > t_0$ 找 $x(t)$, 以及直接由 x_0 出发找 $x(t)$, 都导致同一结果. 对算子 $R(t)$ 来说这就表示

$$R(t - t_0)R(t_0) = R(t)$$

或

$$R(t_1)R(t_2) = R_1(t_1 + t_2) \tag{3}$$

对任意 $t_1, t_2 > 0$.

我们所作的假定在对应用说来是重要的. 大多数情形是满足的. 它由一个物理系统的后面的状态由其前面状态而完全确定这一原理而得出.

可以找出必须附加于算子 A 的条件使得等式 (3) 成立. 关于这一点可参考[35].

现在我们引入问题的有限差分逼近的概念. 设 x_1, x_2, $\cdots$, x_N 是空间 E 的一系点,我们取它做函数 $x(t)$ 的逼近值. 即是说,令 $x_n \approx x(n\Delta t)$ $n=1,2,\cdots N$, $N\Delta t = T$. 假设为了确定这些点我们有一算子方程,而为了简单认为它仅联系两个相邻的点. 因为 x_n 是 $x(n\Delta t)$ 的近似值,所以自然假设含于方程中联系 x_n 和 x_{n+1} 的算子依赖于 Δt. 此外我们也设方程关于 x_{n+1} 可解. 于是我们导致递归关系

$$x_{n+1} = C(\Delta t)x_n, \quad n = 0,1,\cdots, N-1, \tag{4}$$

x_0 给定,

式中 $C(\Delta t)$ 为有界线性算子.我们称此算子为问题 (1)—(2) 的**有限差分逼近**. 因为

$$\frac{x((n+1)\Delta t)-x(n\Delta t)}{\Delta t} = \frac{x_{n+1}-x_n}{\Delta t}$$

$$= \frac{C(\Delta t)x_n - x_n}{\Delta t} = \frac{C(\Delta t)-I}{\Delta t}x_n,$$

所以 $\frac{C(\Delta t)-I}{\Delta t}x_n$ 必须逼近 $\frac{dx}{dt}$. 但在另一方面由(1)

$$\frac{dx}{dt} = Ax,$$

所以为了关系 (4) 确实逼近边值问题,表达式 $\frac{C(\Delta t)-I}{\Delta t}$ 必须在某一意义下逼近算子 A. 与此相应,我们说问题(1)—(2)的有限差分逼近(4)满足**协调性条件**,如果当 $\Delta t \to 0$ 时

$$\left\| \left(\frac{C(\Delta t)-I}{\Delta t} - A \right) x(t) \right\| \to 0.$$

在精确解 $x(t)$ 的某一集 L 上关于 t 在 $0 \leqslant t \leqslant T$ 内一致成

立，而且对应于解 $x(t)\in L$ 的初值 x_0 的集在 E 稠密.

设
$$x_{k+1}=C(\Delta t)x_k,\ k=0,1,2,\cdots,N-1$$
$$x_0 \text{ 给定} \tag{4'}$$
是边值问题 (1)—(2) 的有限差分逼近. 继续应用公式(4)，$k=0,1,\cdots,n-1$，我们得出

$$x_n=[C(\Delta t)]^n x_0. \tag{5}$$

因为点 x_n 是精确解 $x(t)=R(t)x_0$ 对 $t=n\Delta t$ 的逼近值，所以我们引入下述定义.问题(1)—(2)的有限差分逼近(4)称为收敛的，如果对任一趋近于零的序列 $\{\Delta_k t\}$ 和任一 $x_0\in E$，当 $k\to\infty$ 和 $n_k\Delta_k t\to t$，$0\leqslant t\leqslant T$ 时，

$$\|[C(\Delta_k t)]^{n_k}x_0-R(t)x_0\|\to 0.$$

有限差分逼近称为稳定的，如果对任一收敛于零的序列 $\{\Delta_k t\}$，算子集

$$[C(\Delta_k t)]^n\quad n=1,2,\cdots;0\leqslant n\Delta_k t\leqslant T$$

在算子空间依范数有界. 如果有限差分逼近稳定，那么精确解 $x(n\Delta t)$ 的所有近似值 x_n 的集对任一固定初值 x_0 依全体有界.

有下述基本定理成立

定理 (Lax) 设给定适定性问题(1)—(2)及其满足协调性条件的有限差分逼近. 为使有限差分逼近收敛，必须且只须它是稳定的.

必要性. 设 $\{[C(\Delta_j t)]^n\}$，式中 $\Delta_j t\to 0$，$0\leqslant n\Delta_j t\leqslant T$，是空间 $(E\to E)$ 的无界集. 那么由 Banach-Steinhaus 定理的注意，存在子序列 $\{[C(\Delta_k t)]^{n_k}\}$ 和元 x_0 使 $\{[C(\Delta_k t)]^{n_k}\times x_0\}$ 是空间 E 的无界元列.

因为 $0\leqslant n_k\Delta_k t\leqslant T$，所以由序列 $\{n_k\Delta_k t\}$ 可选子序列 $\{n_{k_i}\Delta_{k_i}t\}$ 收敛于某一数 $t_0\in[0,T]$ 从而将有

$$\|[C(\Delta_{k_i}t)]^{n_{k_i}}x_0\|\to\infty,\ n_{k_i}\Delta_{k_i}t\to t_0.$$

但在另一方面由逼近的收敛性假设

$$\|[C(\Delta_{k_i}t)]^{n_{k_i}}x_0 - R(t_0)x_0\| \to 0,$$

由此 $$\|[C(\Delta_{k_i}t)]^{n_{k_i}}x_0\| \to \|R(t_0)x_0\| = c,$$

式中 c 为有限数. 这就得出矛盾. 从而 $\{[C(\Delta_j t)]^n\}$ 是算子空间有界集. 必要性得证.

充分性. 设 $x(t) = R(t)x_0$ 是在协调性条件定义中给定的流形 L 内的精确解之一. 那么对 $\varepsilon > 0$ 存在 δ_1 使

$$\left\|\left(\frac{C(\Delta t) - I}{\Delta t} - A\right)x(t)\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

对 $0<\Delta t < \delta$, 和 $[0,T]$ 内任一 t. 此外依精确解定义我们有

$$\left\|\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} - Ax(t)\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

对 $0<\Delta t < \delta_2$ 和在 $[0,T]$ 内一致. 或者再考虑到

$$x(t+\Delta t) = R(t+\Delta t)x_0 = R(\Delta t)R(t)x_0$$
$$= R(\Delta t)x(t),$$

$$\left\|\left(\frac{R(\Delta t) - I}{\Delta t} - A\right)x(t)\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

对 $0<\Delta t < \delta_2$ 和在 $[0, T]$ 内一致.

由此对 $0<\Delta t < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$

$$\|[C(\Delta t) - R(\Delta t)]x(t)\| < \varepsilon\Delta t \tag{6}$$

而且对 $[0,T]$ 内所有 t.

设 x_0 为初值用以确定所考虑的解 $x(t)$. 令

$$z_k = \{[C(\Delta_k t)]^{n_k} - R(n_k\Delta_k t)\}x_0,$$

式中 $\{\Delta_k t\}$ 为收敛于零的序列且 $n_k\Delta_k t \to t$. 利用等式

$$R(t_1)R(t_2) = R(t_1 + t_2), \quad t_1, t_2 > 0$$

经过简单计算可得

$$
\begin{aligned}
z_k = \sum_{m=0}^{n_k-1} \{ [C(\Delta_k t)]^{m+1} R[(n_k - (m+1))\Delta_k t] \\
- [C(\Delta_k t)]^m R[(n_k - m)\Delta_k t] \} x_0 \\
= \sum_{m=0}^{n_k-1} [C(\Delta_k t)]^m \{ C(\Delta_k t) - R(\Delta_k t) \} R[(n_k \\
- (m+1))\Delta_k t] x_0.
\end{aligned}
$$

由此

$$
\begin{aligned}
\|z_k\| \leqslant \sum_{m=0}^{n_k-1} \|C(\Delta_k t)\|^m \| \{ C(\Delta_k t) - R(\Delta_k t) \} \\
\times R[(n_k - (m+1))\Delta_k t] x_0 \|. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

由逼近稳定性假设存在常数K使

$$
\|C(\Delta_k t)\|^m \leqslant K. \qquad (8)
$$

于是把(6)和(8)应用到(7)可得

$$
\|z_k\| \leqslant \sum_{m=0}^{n_k-1} K\varepsilon \Delta_k t = K\varepsilon n_k \Delta_k t \leqslant K\varepsilon T.
$$

因为ε是任意的，所以

$$
\|z_k\| \to 0 \quad 对 \quad \Delta_k t \to 0, \quad n_k \Delta_k t \to t.
$$

此外我们有

$$
\begin{aligned}
\| \{ [C(\Delta_k t)]^{n_k} - R(t) \} x_0 \| \leqslant \| \{ [C(\Delta_k t)]^{n_k} \qquad (9) \\
- R(n_k \Delta_k t) \} x_0 \| \\
+ \| [R(n_k \Delta_k t) - R(t)] x_0 \| \\
= \|z_k\| + \| [R(n_k \Delta_k t) - R(t)] x_0 \|.
\end{aligned}
$$

我们来考虑后一项．在此有

$$
R(n_k \Delta_k t) - R(t) =
$$

$$
\begin{cases}
[R(\tau) - I] R(t) & 对 \quad \tau = n_k \Delta_k t - t > 0, \\
-[R(\tau) - I] R(\tilde{t}) & 对 \quad \tau = t - n_k \Delta_k t > 0,
\end{cases}
$$

其中 $$\tilde{t} = n_k \Delta_k t.$$

在两个情形下对 $n_k \Delta_k t \to t$

$$[R(\tau) - I] \to 0$$

且 $R(t)$ 或 $R(\tilde{t})$ 有界. 因此对 $t < n_k \Delta_k t$

$$\|[R(n_k \Delta_k t) - R(t)]x_0\| \leqslant \|R(t)\| \|[R(\tau) - I]x_0\| < \varepsilon M \tag{10}$$

式中 $\varepsilon \to 0$ 对 $t \to 0$, 且

$$M = \sup_t \|R(t)\|.$$

类似估值对 $t > n_k \Delta_k t$ 成立. 从而由(9)和(10)可得

$$\|\{[C(\Delta_k t)]^{n_k} - R(t)\}x_0\| \leqslant \|z_k\| + \varepsilon M,$$

而且对 $n_k \Delta_k t \to t$ 右端两项可使之任意小，所以在作为流形 L 内的解的初值 x_0 上有

$$\{C[(\Delta_k t)]^{n_k} - R(t)\}x_0 \to 0.$$

如果 x 为空间任一元，那么可以写

$$\{[C(\Delta_k t)]^{n_k} - R(t)\}x = \{[C(\Delta_k t)]^{n_k} - R(t)\}x_0 + [C(\Delta_k t)]^{n_k}(x - x_0) + R(t)(x - x_0),$$

而且容易看出，右端的三个项都可以使之任意小. 第一项由刚才的证明得知，而另两项则因为元 x_0 的某在 E 稠密而且集 $\{[C(\Delta_k t)]^{n_k}\}$ 和 $\{R(t)\}$ 有界. 由此

$$\{[C(\Delta_k t)]^{n_k} - R(t)\}x \to 0$$

对 $\Delta_k t \to 0$ 和 $n_k \Delta_k t \to t$ 在整个 E 上成立. 充分性证完.

作为 Lax 定理的应用，我们考虑对传热方程的边值问题.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant a, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{11}$$

$$u(0,t) = u(a,t) = 0, \quad u(\xi,0) = \varphi(\xi)$$

的有限差分法.

取在区间 $[0,a]$ 的两个端点为零且在此区间上连续的所

有函数所成的空间 $C_0[0, a]$ 为基本 Banach 空间. 那么两变量的连续函数 $u(\xi, t)$, 式中 $u(0, t) = u(a, t) = 0$, 可以看做空间 $C_0[0, a]$ 内一参数系的元

$$u_t(\xi) = x(t),$$

而且边值问题(11)可以写成

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x(0) = \varphi, \tag{12}$$

式中 A 是微分算子

$$A = c^2 \frac{d^2}{d\xi^2}$$

定义在空间 $C_0[0, a]$ 内二次连续可微且对 $\xi = 0$ 和 $\xi = a$ 为零的函数的集上.

作为逼近边值问题可选系

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} = c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta\xi)^2} \tag{13}$$

$$j = 1, 2, \cdots, J-1, \quad n = 1, 2, \cdots, N,$$
$$J\Delta\xi = a, N\Delta t = T,$$

和边值条件

$$u_0^{(n)} = u_J^{(n)} = 0, \quad u_j^0 = \varphi(j\Delta\xi). \tag{14}$$

系(13)的解首先仅在形如 $(j\Delta\xi, n\Delta t)$ 的点上确定. 用线性插值我们在矩形 $0 \leqslant \xi \leqslant a, 0 \leqslant t \leqslant T$ 所有其余的点补定义它, 并用 $\tilde{u}(\xi, t)$ 代表这个解. 又 $\tilde{u}(\xi, n\Delta t)$ 将看做空间 $C_0[0, a]$ 的元 x_n 而且认为它们是解 $x(t)$ 在点 $t = n\Delta t$ 的近似值. 如果假设 $\Delta\xi$ 和 Δt 不是独立的, 并认为 $\Delta\xi = g(\Delta t)$, 其中 $g(\alpha) \to 0$ 对 $\alpha \to 0$, 那么近似边值问题可以写成递归公式的形式

$$x_{n+1} = C(\Delta t)x_n, \quad x_0 = \varphi$$
$$n = 0, 1, 2, \cdots, N-1. \tag{15}$$

问题 (11) 从而 (12) 如所熟知是适定的. 如果注意对充分光滑的函数差商在矩形 $0\leqslant\xi\leqslant a$, $0\leqslant t\leqslant T$ 内一致收敛于导数,那么对这样函数当 $\Delta t\to 0$ 时

$$\left\|\left(\frac{C(\Delta t)-I}{\Delta t}-A\right)x(t)\right\|\to 0,$$

从而协调性条件也满足.

我们证明，为了解差分边值问题有**极值原理**成立:

解在差分网的内点的最大值(最小值)不可能超过（可能小于）解在边界的最大值（最小值).

假设不然. 令

$$\mu=u_{j_0}^{n_0}$$

为解在内点的最大值,而且假设 n_0 和 j_0 是下标 n 和 j 的最小值使得 $u_j^n=\mu$. 对这些下标的值写出方程(13)可得

$$\frac{u_{j_0}^{n_0}-u_{j_0}^{n_0-1}}{\Delta t}=c^2\frac{u_{j_0+1}^{n_0}-2u_{j_0}^{n_0}+u_{j_0-1}^{n_0}}{(\Delta\xi)^2}.$$

但这个等式是不可能的，因为它的左边由

$$u_{j_0}^{n_0}>u_{j_0}^{n_0-1}$$

为正，而右边由

$$u_{j_0}^{n_0}\geqslant u_{j_0+1}^{n}$$

和
$$u_{j_0}^{n_0}>u_{j_0-1}^{n_0}$$

为负. 这个矛盾证明了极值原理.

由极值原理知函数 $\tilde{u}(\xi,t)$ 在矩形 $0\leqslant\xi\leqslant a$ $0\leqslant t\leqslant T$ 的边界取最大值和最小值.

若写等式(15)为如下形式

$$x_n=[C(\Delta t)]^n\varphi,$$

那么根据刚才所说的有

$\sup\limits_{\xi}|x_n(\xi)|=\|[C(\Delta t)]^n\varphi\|\leqslant\sup\limits_{\xi}|\varphi(\xi)|=\|\varphi\|$, 由

此得出 $\|[C(\Delta t)]^n\| \leqslant 1$ 对任意 Δt 和 n. 从而逼近稳定. 由此根据 Lax 定理可知差分边值问题的解收敛于微分方程边值问题的解.

§3 抽象函数的微分

定义 设 E_x 和 E_y 为线性赋范空间, $y = f(x)$ 为定义于 E_x 取值于 E_y 内的抽象函数.

类似于有限个数值变量的函数的微分的定义我们引入抽象函数微分的两个定义.

强微分 (Fréchet 微分) 设 h 为空间 E_x 的任一元, 设存在线性算子 $l \in (E_x \to E_y)$ (一般依赖于 x) 使得

$$f(x+h) - f(x) = lh + \omega(x,h) \tag{1}$$

式中

$$\frac{\|\omega(x,h)\|}{\|h\|} \to 0 \quad 对 \ \|h\| \to 0, \tag{2}$$

在此情形下我们称 lh 为函数 $f(x)$ 在点 x 对应于变量的增量 h 的强微分或 Fréchet 微分. 并用 $df(x,h)$ 代表.

线性算子 l 一般依赖于 x 用 $f'(x)$ 代表, 于是

$$df(x,h) = f'(x)h, \ f'(x) \in (E_x \to E_y) \tag{3}$$

算子 $f'(x)$ 可以看做其值属于 $(E_x \to E_y)$ 的 x 的函数, 它定义于 $f(x)$ 在其上可微分的集 $\{x\} \subset E_x$ 上.

我们称 $f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 在点 x 的一阶强导数或 Fréchet 导数. 等式 (1) 可以写成

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + o(\|h\|) \tag{4}$$

这个等式右边的第一项是 h 的线性函数它除去一个较 $\|h\|$ 高阶的无穷小量外逼近 $f(x+h) - f(x)$.

弱微分 (Gateaux 微分) 函数 $f(x)$ 在点 x 的弱微分是

指表达式

$$Df(x,h)=\frac{d}{dt}f(x+th)\bigg|_{t=0}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+th)-f(x)}{t}$$

假设等式右边的极限是在范数收敛意义下而存在的[1]。

例 1. 设 $E_x=E_y=C[a,b]$，又设

$$f(x)=\int_a^b K(t,s)g(s,x(s))ds,$$

式中核 $K(t,s)$ 在正方形 $a\leqslant t,\ s\leqslant b$ 内连续，且 $g(u,v)$ 为两变元函数定义于带形 $a\leqslant u\leqslant b,\ -\infty<v<+\infty$ 且在此区域连续. 于是 $f(x)$ 为一抽象函数定义于 $C[a,b]$ 且具有值于同一空间.

我们设函数 $g(u,v)$ 不仅连续而且有偏导数 $g'_v(u,v)$ 在带形 $a\leqslant u\leqslant b,\ -\infty<v<+\infty$ 一致连续，那么 $f(x)$ 为强可微函数. 事实上，对任意函数 $h(s)\in C[a,b]$ 有

$$f(x+h)-f(x)=\int_a^b K(t,s)g(s,x(s)+h(s))ds$$

$$-\int_a^b K(t,s)g(s,x(s))ds$$

$$=\int_a^b K(t,s)[g(s,x(s)+h(s))$$

$$-g(s,x(s))]ds.$$

依 Lagrange 中值定理.

$$g(s,x(s)+h(s))-g(s,x(s))$$

---

1) 有时弱微分是指

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+th)-f(x)}{t}$$

在此极限是指元的弱收敛意义下而取的. 也注意. Gateaux 微分虽为齐性的但并不假设它可加的.

$$= g'_v(s, x(s) + \theta(s)h(s))h(s),$$

其中 $0 \leqslant \theta(s) \leqslant 1$. 此外我们有

$$g'_v(s, x(s) + \theta(s)h(s)) = g'_v(s, x(s)) + \alpha(s, x(s), \theta(s)h(s))$$ [1]

在此对 $\|h\| \to 0$, 即在 $[ab]$ 上一致地 $h(s) \to 0$ 时, $\alpha(s, x(s), \theta(s)h(s)) \to 0$ 也在 $[a, b]$ 上一致成立,这是因为在有界闭区域 $a \leqslant s \leqslant b, |x| \leqslant c_1, |u| \leqslant c_2$ 上连续的函数在此区域一致连续. 因此

$$f(x+h) - f(x) = \int_a^b K(t, s) g'_v(s, x(s)) h(s) ds$$
$$+ \int_a^b K(t, s) \alpha(s, x(s), \theta(s)h(s)) h(s) ds$$
$$= lh + \omega(x, h),$$

式中

$$lh = \int_a^b K(t, s) g'_v(s, x(s)) h(s) ds$$

且

$$\omega(x, h) = \int_a^b K(t, s) \alpha(s, x(s), \theta(s)h(s)) h(s) ds.$$

这时

$$\|\omega(x, h)\| = \max_t \left| \int_a^b K(t, s) \alpha(s, x(s), \theta(s)h(s)) h(s) ds \right|$$
$$\leqslant \max_{t,s} |K(t, s)| \, \|\alpha(s, x(s), \theta(s)h(s))\| (b-a)$$
$$\times \|h\| = c \|\alpha(s, x(s), \theta(s)h(s))\| \|h\|,$$

因此

$$\frac{\|\omega(x, h)\|}{\|h\|} \leqslant c \|\alpha(s, x(s), \theta(s)h(s))\| \to 0$$

---

1) $\alpha(s, x, u) = g'_v(s, x+u) - g'_v(s, x)$.

对 $\|h\| \to 0$.

从而 $f(x)$ 依 Fréchet 可微且

$$df(x, h) = \int_a^b K(t,s) g'_v(s, x(s)) h(s) ds.$$

2. 我们考虑连续可微函数 $y(t), a \leqslant t \leqslant b$ 的空间 $C^1[a, b]$ 以

$$\|y\| = \max_t (|y(t)|, |y'(t)|)$$

为范数. 在此空间考虑最简单变分问题的泛函

$$J\{y\} = \int_a^b F(t, y(t), y'(t)) dt.$$

两个微分的定义对应于两个熟知的变分的定义.

同样事实对变分学内另外泛函成立. 事实上抽象函数的微分的定义在变分法内自然出现.

定理 1 如果存在强微分 $df(x, h)$, 那么也存在弱微分 $Df(x,h)$ 且 $Df(x,h) = df(x,h)$.

事实上,

$$\begin{aligned} f(x + th) - f(x) &= df(x, th) + \omega(x, th) \\ &= t\,df(x, h) + \omega(x, th). \end{aligned}$$

在此由 (2)

$$\|\omega(x, th)\| = o(\|th\|) = o(|t| \|h\|) = o(t)$$

当 $t \to 0$ 时是较 t 为高阶的无穷小. 因此

$$\frac{f(x + th) - f(x)}{t} = df(x, h) + \frac{\omega(x, th)}{t} \to df(x, h)$$

对 $t \to 0$. 因此

$$Df(x, h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} = df(x, h),$$

由此我们证明了弱微分的存在且与强微分相等.

在 $Df(x, h)$ 的定义中没有要求它关于 h 是线性的. 如

果此事成立，那么

$$Df(x,h)=Lh=f'(x)_c h,$$

式中 $f'(x)_c$ 是关于 h 的线性算子．我们称 $f'(x)_c$ 为函数 $f(x)$ 在点 x 的弱导数．

定理 2 如果在球 $\|x-x_0\|<r$ 内存在弱微分 $Df(x,h)$ 并设它关于 x 一致连续且关于 h 连续，那么在此球内存在强微分 $df(x,h)$ 且

$$df(x,h)=Df(x,h).$$

事实上，对 $\|h\|<r(x)$，式中数 $r(x)$ 是属于球 $\|x-x_0\|<r$ 的 x 的球邻域的半径，在所有点 $x_t=x+th$，$0\leqslant t\leqslant 1$ 存在微分 $Df(x_t,h)$．因为

$$Df(x_t,h)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(x_t+\Delta th)-f(x_t)}{\Delta t}$$

且 $$x_t+\Delta th=x+(t+\Delta t)h=x_{t+\Delta t},$$

所以

$$Df(x_t,h)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(x_{t+\Delta t})-f(x_t)}{\Delta t}=\frac{d}{dt}f(x_t)$$

$$=\frac{d}{dt}f(x+th).$$

我们证明微分 $Df(x,h)$ 依变量 h 的可加性：

$$Df(x,h_1+h_2)=Df(x,h_1)+Df(x,h_2). \qquad (5)$$

首先注意，由于函数

$$Df(x_t,h)=\frac{d}{dt}f(x+th)$$

的连续性的假设我们有

$$f(x+th_1)-f(x)=\int_0^t\frac{d}{d\tau}f(x+\tau h_1)d\tau$$

$$= \int_0^t Df(x + \tau h_1, h_1) d\tau$$

$$= tDf(x, h_1) + \omega_1, \tag{6}$$

式中

$$\omega_1 = \int_0^t [Df(x + \tau h_1, h_1) - Df(x, h_1)] d\tau.$$

同理

$$f(x + t(h_1 + h_2)) - f(x) = tDf(x, h_1 + h_2) + \omega_2, \tag{7}$$

式中

$$\omega_2 = \int_0^t [Df(x + \tau(h_1 + h_2), h_1 + h_2) - Df(x, h_1 + h_2)] dt,$$

且

$$f(x + t(h_1 + h_2)) - f(x + th_1) = tDf(x, h_2) + \omega_3, \tag{8}$$

式中

$$\omega_3 = \int_0^t [Df(x + th_1 + \tau h_2, h_2) - Df(x, h_2)] d\tau.$$

因为 $Df(x,h)$ 对变量 x 连续，所以对任意 $\varepsilon > 0$ 和对充分小 $t > 0$ 及 $0 \leqslant t \leqslant t$

$$\|Df(x + th_1, h_1) - Df(x, h_1)\| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\|Df(x + t(h_1 + h_2), h_1 + h_2) - Df(x, h_1 + h_2)\| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\|Df(x + th_1 + th_2, h_2) - Df(x, h_2)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

由此

$$\|\omega_1\| = \left\| \int_0^t [Df(x + \tau h_1, h_1) - Df(x, h_1)] d\tau \right\| < \frac{\varepsilon}{3} t.$$

同理

$$\|\omega_2\| < \frac{\varepsilon}{3}t, \qquad \|\omega_3\| < \frac{\varepsilon}{3}t.$$

由(6)，(7)，(8)可得

$$\begin{aligned}
0 &= [f(x+th_1)-f(x)] + [f(x+t(h_1+h_2)) \\
&\quad - f(x+th_1)] - [f(x+t(h_1+h_2))-f(x)] \\
&= t[Df(x,h_1)+Df(x,h_2)-Df(x,h_1+h_2)] + \omega_1 \\
&\quad + \omega_2 - \omega_3.
\end{aligned}$$

由此

$$\begin{aligned}
&Df(x,h_1)+Df(x,h_2)-Df(x,h_1+h_2) \\
&\qquad = \frac{1}{t}(\omega_1+\omega_2-\omega_3).
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
&\|Df(x,h_1)+Df(x,h_2)-Df(x,h_1+h_2)\| \\
&\leqslant \frac{1}{t}(\|\omega_1\|+\|\omega_2\|+\|\omega_3\|) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

因为 ε 是任意的，所以

$$\|Df(x,h_1)+Df(x,h_2)-Df(x,h_1+h_2)\| = 0,$$

因此(5)得证. 此外，因 $Df(x,h)$ 关于 h 连续，所以它关于 h 是线性有界算子: $Df(x,h)=f'(x)_c h$. 因为 $Df(x,h)=f'(x)_c h$ 关于 x 一致连续，所以 $f'(x)_c$ 关于 x 一致连续.

现在我们证明

$$f(x+h)-f(x) = f'(x)_c h + o(\|h\|). \tag{4'}$$

如果这样，那么 $Df(x,h)$ 作为差 $f(x+h)-f(x)$ 关于 h 的主要线性部分将与 $df(x,h)$ 一致.

我们有

$$\begin{aligned}
f(x+h)-f(x) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x+th)\,dt \\
&= \int_0^1 Df(x+th,h)\,dt = \left(\int_0^1 f'(x+th)_c dt\right)h
\end{aligned}$$

$$= f'(x)_c h + \omega \tag{9}$$

式中

$$\omega = \left(\int_0^1 [f'(x+th)_c - f'(x)_c]dt\right)h.$$

由 $f'(x)_c$ 的一致连续性,对 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 有

$$\|f'(x+th)_c - f'(x)_c\| \leqslant \alpha(\|h\|) \to 0 \text{ 对 } \|h\| \to 0,$$

由此

$$\|\omega\| \leqslant \left\|\int_0^1 [f'(x+th)_c - f'(x)_c]dt\right\| \|h\|$$

$$\leqslant \int_0^1 \|f'(x+th)_c - f'(x)_c\|dt\|h\| \leqslant \alpha(\|h\|)\|h\|,$$

这就证明了等式(4′).

由此

$$Df(x,h) = df(x,h), \ f'(x)_c = f'(x).$$

这就是所要证明的.

以后不作特别声明时,对所有考虑到的可微分函数 f 将设

$$Df(x,h) = df(x,h).$$

注意,如果在球 $\|x - x_0\| < r$ 内有不等式

$$\|f'(x)\| \leqslant L$$

成立,且 x_1, x_2 属于此球,那么

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leqslant L\|x_1 - x_2\|.$$

事实上,由球 $\|x - x_0\| < r$ 的凸性,由 x_1 和 x_2 属于此球蕴含联此两点的线段 $\{x_t\}$ 也属于此球.

$$x_t = (1-t)x_1 + tx_2 = t(x_2 - x_1) + x_1, 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

由此可知

$$\|f'(x_t)\| \leqslant L.$$

且因

$$f(x_2) - f(x_1) = \int_0^1 f'(x_t)(x_2 - x_1)dt,$$

所以

$$\|f(x_2)-f(x_1)\| \leqslant \int_0^1 \|f'(x_t)\| \|x_2-x_1\| dt$$
$$\leqslant L\|x_2-x_1\|。$$

§4 逆算子定理、牛顿方法

利用算子导数的概念可以证明逆算子局部存在的定理，类似于具有不为零的导数的单调函数的逆函数的存在定理.

定理 1 设算子 $y=f(x)$ 定义在空间 E_x 的点 x_0 的某一邻域且映此邻域于 E_y. 假设

1. $f(x_0)=y_0$.

2. 导数 $f'(x)$ 在此邻域存在，且在此邻域内有界并连续.

3. $[f'(x_0)]^{-1}$ 存在.

那么在点 y_0 的某一邻域内存在逆算子 $x=f^{-1}(y)$，它在点 y_0 取值 x_0 并在 y_0 的这个邻域连续

考虑方程

$$x=A(x,y), \tag{1}$$

式中

$$A(x;y)=x-[f'(x_0)]^{-1}(f(x)-y) \tag{2}$$

且 y 起参数作用.

不难看出，如果对给定的 $y\in E_y$，方程(1)有解 x，那么 $f(x)=y$，反之也成立. 为了证明方程(1)的解存在，我们应用压缩映象原理.

对固定 $y\in E_y$ 我们有

$$A'(x,y)=I-[f'(x_0)]^{-1}f'(x)$$
$$=[f'(x_0)]^{-1}(f'(x_0)-f(x)),$$

由此对 $\|x-x_0\|\leqslant r$

$$\|A'(x;y)\| \leqslant \|[f'(x_0)]^{-1}\|\|f'(x_0)-f(x)\| \leqslant q(r),$$

式中 $q(r)\to 0$ 当 $r\to 0$，这是因为我们假设了 $f'(x)$ 连续. 由此可知算子 $A(x,y)$ 依变量 x 满足 Lipschitz 条件，

$$\|A(x_1;y)-A(x_2,y)\| \leqslant q(r)\|x_1-x_2\|,$$
$$x_1x_2\in \bar{s}(x_0,r). \tag{3}$$

我们来计算差 $\Delta(x_0,y)-x_0$. 我们有

$$\begin{aligned}\|A(x_0;y)-x_0\| &= \|[f'(x_0)]^{-1}(f(x_0)-y)\| \\ &= \|[f'(x_0)]^{-1}(y-y_0)\| \\ &\leqslant \|[f'(x_0)]^{-1}\|\|y-y_0\|,\end{aligned}$$

即是说

$$\|A(x_0;y)-x_0\| \leqslant \|[f'(x_0)]^{-1}\|\|y-y_0\|. \tag{4}$$

此外，由不等式(3)和(4)

$$\begin{aligned}\|A(x;y)-x_0\| &\leqslant \|A(x;y)-A(x_0,y)\| \\ &+\|A(x_0;y)-x_0\| \leqslant q(r)\|x-x_0\| \\ &+\|[f'(x_0)]^{-1}\|\|y-y_0\|.\end{aligned}$$

今选 r_x 使 $q=q(r_x)<1$ 且考虑在下述的球内的 y,

$$\|y-y_0\|<r_y=(1-q)r_x/\|[f'(x_0)]^{-1}\|.$$

那么前面的不等式给出

$$\|A(x;y)-x_0\| \leqslant q\|x-x_0\| + \frac{1-q}{\|[f'(x_0)]^{-1}\|}\|[f'(x_0)]^{-1}\|r_x<r_x.$$

由此算子 A 实现了 $\|x-x_0\|\leqslant r_x$ 到自身的压缩映象. 因此对每一 y, $\|y-y_0\|<r_y$ 对应唯一 x 使 $\|x-x_0\|<r_x$ 且 $f(x)=y$. 由此在球 $\|y-y_0\|<r_y$ 内定义了逆算子 $x=\varphi(y)$ 取值于球 $\|x-x_0\|<r_x$ 内. 显然 $\varphi(y_0)=x_0$.

由不等式(3)可知

$$\begin{aligned}\|\varphi(y_1)-\varphi(y_2)\| &= \|x_1-x_2\| = \|A(x_1;y_1)-A(x_2;y_2)\| \\ &\leqslant \|A(x_1;y_1)-A(x_1;y_2)\|+\|A(x_1;y_2)-A(x_2;y_2)\|\end{aligned}$$

$$\leqslant \|[f'(x_0)]^{-1}\|\|y_1 - y_2\| + q\|x_1 - x_2\|.$$

由此

$$(1 - q)\|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)\| \leqslant \|[f'(x_0)]^{-1}\|\|y_1 - y_2\|,$$

或

$$\|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)\| \leqslant \frac{\|[f'(x_0)]^{-1}\|}{1 - q}\|y_1 - y_2\|. \tag{5}$$

即逆算子 $\varphi(y)$ 在球 $\|y - y_0\| < r_y$ 内满足 Lipschitz 条件，从而连续.

定理证完.

根据压缩映象原理，逆算子 $\varphi(y)$ 可以作为算子序列

$$\varphi_0(y) = x_0,$$

$$\varphi_n(y) = A(\varphi_{n-1}(y), y) \ (\|y - y_0\| < r_y, n = 1, 2, \cdots) \tag{6}$$

的极限而得出. 因为 $A(x, y)$ 依两变量连续，那么由数学归纳法可以证明，所有逐次逼近 $\varphi_n(y)$ 是 y 的连续函数，此外估值式

$$\|\varphi(y) - \varphi_n(y)\| \leqslant \frac{q^n}{1 - q}\|\varphi_1(y) - \varphi_0(y)\|$$

$$\leqslant \frac{q^n}{1 - q}\|[f'(x_0)]^{-1}\|\|f(x_0) - y\|$$

指出序列 $\varphi_n(y)$ 趋近于极限算子 $\varphi(y)$ 在球 $\|y - y_0\| < r_y$ 内是一致的.

例. 在空间 $C[0,1]$ 内考虑非线性积分方程

$$x(t) - \int_0^1 K(t, s, x(s))ds = y(t), \tag{7}$$

式中核 $K(t, s, u)$ 在区域 $0 \leqslant t, s \leqslant 1, -\infty < u < +\infty$ 连续且在此区域有连续导数 $K'_u(t, s, u)$. 此外设

a) $K(t, s, 0) \equiv 0$, 和 $K'_u(t, s, 0) \neq 0$,

b) 单位不是核 $K_u'(t, s, 0)$ 的本征值，即线性积分方程

$$z(t) - \int_0^1 K_u'(t,s,0)z(s)ds = 0$$

没有非零解.

把方程(7)写成

$$f(x) = y \tag{8}$$

形式，我们容易验证

1) $f(0) = 0$,

2) 导数 $f'(x)$ 在零的邻域存在且具有形式

$$f'(x)h = h(t) - \int_0^1 K_u'(t,s,x(s))h(s)ds.$$

因此它在此区域有界且连续，

3) 由 b) 知 $[f'(0)]^{-1}$ 存在.

于是根据刚才证明的定理，方程(7)对所有充分小的右边 $y(t)$ 有唯一解，而此解可由逐次逼近方法得出.

牛顿法 作为应用抽象函数的导数的概念的另一例，我们考虑解算子方程的牛顿法. 如所熟知，对数值方程 $f(x) = 0$ 的情形，牛顿法是求依公式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

决定的逐次逼近.

对函数 $f(x)$ 及其导数赋以某些假定后，可以证明近似解 x_n 收敛于有限极限而此极限即为方程的解.

Л. В. Канторович 曾指出，牛顿方法可适用于算子方程. 现在我们来考虑这个问题，而且为了简单我们假设它满足更为限制的条件[1].

设给定算子方程

1) 对较弱条件下的详细研究见[12].

$$f(x) = 0, \tag{9}$$

式中 $f(x)$ 为抽象函数给定在 Banach 空间 E_x 且取值于 Banach 空间 E_y. 假设我们在取方程 (9) 的近似解的某一球 $S(x_0, r)$ 内函数 $f(x)$ 强可微且其导数 $f'(x)$ 满足 Lipschitz 条件

$$\|f'(x) - f'(\xi)\| \leqslant L\|x - \xi\|. \tag{10}$$

如果再设 $[f'(x)]^{-1}$ 存在，那么同于数值函数的情形可依公式

$$x_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1}f(x_n)$$

构造近似序列，这个公式有不便之处，即必须继续求逆算子 $[f'(x_n)]^{-1}$，即是说，必须解线性算子方程

$$f'(x_n)h = g.$$

为了除去这个不方便 Канторович 提出来一个变更的牛顿方法，在其内逐次逼近依公式

$$x_{n+1} = x_n - [f'(x_0)]^{-1}f(x_n) \tag{11}$$

计算，式中对任一 n 固定同一个逆算子.

现在仅考虑变更的牛顿方法.

引入下面常数

$$M_0 = \|[f'(x_0)]^{-1}\|, \quad \eta_0 = \|[f'(x_0)]^{-1}f(x_0)\|.$$

定理 2 如果

$$h_0 = M_0\eta_0 L \leqslant \frac{1}{4}$$

且 t_0 是方程

$$h_0 t^2 - t + 1 = 0$$

的小的一个根. 那么在球

$$\|x - x_0\| \leqslant t_0\eta_0$$

内方程 $f(x) = 0$ 有唯一解 x^* 且由公式 (11) 定义的逐次逼近 x_n 收敛于这个解.

考虑算子

$$Ax = x - [f'(x_0)]^{-1}f(x).$$

此算子变换球 $\|x - x_0\| \leqslant t_0\eta_0$ 于其自身．事实上

$$\begin{aligned} Ax - x_0 = x - x_0 - [f'(x_0)]^{-1}f(x) \\ = [f'(x_0)]^{-1}\{f'(x_0)(x - x_0) - f(x) \\ + f(x_0)\} - [f'(x_0)]^{-1}f(x_0). \end{aligned}$$

由此

$$\begin{aligned} \|Ax - x_0\| \leqslant \|[f'(x_0)]^{-1}\|\|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\| \\ + \|[f'(x_0)]^{-1}f(x_0)\|, \end{aligned}$$

即

$$\|Ax - x_0\| \leqslant M_0\|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\| + \eta_0.$$

考虑函数

$$\varphi(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

我们有[1)]

$$\varphi'(x) = f'(x) - f'(x_0).$$

设 $x \in S(x_0, t_0\eta_0)$．于是

$$\|\varphi'(x)\| = \|f'(x) - f'(x_0)\| \leqslant L\|x - x_0\| \leqslant Lt_0\eta_0.$$

因此

$$\begin{aligned} \|\varphi(x)\| = \|\varphi(x) - \varphi(x_0)\| \leqslant Lt_0\eta_0\|x - x_0\| \\ \leqslant L(t_0\eta_0)^2. \end{aligned}$$

所以如果 $x \in S(x_0, t_0\eta_0)$，那么

$$\begin{aligned} \|Ax - x_0\| \leqslant M_0Lt_0^2\eta_0^2 + \eta_0 = \eta_0(M_0L\eta_0t_0^2 + 1) \\ = \eta_0(\eta_0t_0^2 + 1) = \eta_0t_0, \end{aligned}$$

即算子 A 映球 $\|x - x_0\| \leqslant t_0\eta_0$ 于其自身．

我们再证明算子 A 在此球内为压缩映象．

对 $x \in S(x_0, t_0\eta_0)$ 有

$$A'(x) = I - [f'(x_0)]^{-1}f'(x)$$

1) 线性算子 $Ux = f'(x_0)x$ 的导数等于 $f'(x_0)$。

$$= [f'(x_0)]^{-1}(f'(x_0) - f'(x)),$$

从而

$$\|A'(x)\| \leqslant M_0\|f'(x) - f'(x_0)\| \leqslant M_0 L\|x - x_0\|$$
$$\leqslant M_0 L\eta_0 t_0.$$

因为 t_0 是方程 $h_0 t^2 - t + 1 = 0$ 的一个小的根，所以

$$t_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4h_0}}{2h_0}.$$

由此有

$$\|A'(x)\| \leqslant M_0 L\eta_0 t_0 = h_0 \frac{1 - \sqrt{1 - 4h_0}}{2h_0}$$
$$= \frac{1 - \sqrt{1 - 4h_0}}{2} < q < 1,$$

从而

$$\|Ax - A\xi\| \leqslant q\|x - \xi\|. \tag{12}$$

由此我们证明了算子 A 为映球 $S(x_0, t_0\eta_0)$ 于其自身的压缩映象，因而在此球内存在唯一不动点 x^*. 对于 x^* 有

$$x^* = x^* - [f'(x_0)]^{-1}f(x^*).$$

即 x^* 是方程(9)的解

$$f(x^*) = 0.$$

点 x^* 是逐次逼近

$$x_{n+1} = Ax_n = x_n - [f'(x_0)]^{-1}f(x_n) \tag{11'}$$

的极限. 定理全部证完.

注 1. 条件 $h_0 \leqslant \frac{1}{4}$ 可以被满足，如果取充分接近于解的初值近似 x_0.

2. 变更牛顿方法的逐次近似的收敛速度由不等式

$$\|x_n - x^*\| \leqslant \frac{q^n}{1 - q} \|[f'(x_0)]^{-1}f(x_0)\|$$

确定，此式易由(12)得出. 如果我们考虑非变更的牛顿方法，那么它的收敛速度更高，即

$$\|x_n - x^*\| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}(2h_0)^{2^n-1}\eta_0.$$

详见[13].

例. 考虑 Hammerstein 型非线性积分方程

$$x(t) - \int_0^1 K(t,s)g(s,x(s))ds = 0, \tag{13}$$

式中核 $K(t,s)$ 在正方形 $0\leqslant t,s\leqslant 1$ 内依两变量全体连续，函数 $g(s,u)$ 依两变量在带形 $0\leqslant s\leqslant 1$，$-\infty < u < +\infty$ 连续且有连续导数 $g'_u(s,u)$ 并关于第二变量满足 Lipschitz 条件

$$|g'_u(s,u_1) - g'_u(s,u_2)| \leqslant \lambda|u_1 - u_2|.$$

于是抽象函数

$$f(x) = x(t) - \int_0^1 K(t,s)g(s,x(s))ds$$

变换空间 $C[0,1]$ 于其自身，并且强可微

$$f'(x)h = h(t) - \int_0^1 K(t,s)g'_u(s,x(s))h(s)ds,$$

又导数 $f'(x)$ 也满足 Lipschitz 条件

$$\|f'(x) - f'(\xi)\| \leqslant a\lambda\|x - \xi\|,$$

式中 $a = \sup\limits_{t,s}|K(t,s)|$.

因此，如果数一不为线性积分方程

$$h(t) - \lambda\int_0^1 K(t,s)g'_u(s,x_0(s))h(s)ds = 0 \tag{14}$$

的本征值且

$$M_0 = \sup_t \int_0^1 |R_0(t,s,1)|ds,$$

式中 $R_0(t,s,\lambda)$ 为方程(14)的予解算子. 那么当

$$h_0 = LM_0\eta_0 \leqslant \frac{1}{4}$$

时，其中

$$\eta_0 = \sup_t \int_0^1 |R_0(t, s, 1)| \, | x_0(s) - \int_0^1 K(s,\sigma) g(\sigma, x_0(\sigma)) d\sigma | ds,$$

则牛顿方法可应用于对初值近似 $x_0(t)$ 的方程(13)，而且此方法的逐次逼近收敛于这个方程的解。

§5 齐次型与多项式

元的乘法 我们常常要遇到因子与乘积为不同空间的元的乘法运算。

我们来考虑三个线性赋范空间 E_x，E_y，E_z，我们今对 E_x 的任意元 x，E_y 的任意元 y 来引入运算而得出 E_z 的元 $z = xy$。我们要求这个乘法运算具下述性质：

1) $(x_1 + x_2)y = x_1 y + x_2 y$,

2) $x(y_1 + y_2) = xy_1 + xy_2$,

3) 当 $x_n \to x_0$ 且 $y_n \to y_0$，$x_n y_n \to x_0 y_0$。

运算 xy 对固定的 x 是可加的且关于 y 是连续的，即是线性算子定义在 E_y 其值域于 E_z。同理，乘法运算 xy 对固定的 y 是线性算子映 E_x 于 E_z。

由此可知

$$(\lambda x)y = \lambda(xy), \quad x(\lambda y) = \lambda(xy).$$

例 1. 设 A 是线性算子映 E_x 于 E_y，B 是线性算子映 E_y 于 E_z。那么 BA 是线性算子映 E_x 于 E_z。

例 2. 设 $x(t)$ 为 $L_{p_1}[0, 1]$ 函数，$y(t)$ 为 $L_{p_2}[0, 1]$ 函

数．那么它们在通常意义下的乘积是 $L_q[0,1]$ 的元，其中

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}.$$

例 3．实 Hilbert 空间两个元 x 和 y 的内积可以看做 x 乘 y 的结果，其中 $x\in H$，$y\in H$ 且 $xy\in R=(-\infty,\infty)$.

例 4．设 x 为 E_x 的元且 A 为线性算子映 E_x 于 E_y，那么 Ax 可以看做 A 和 x 的积：

$$A\in(E_x\to E_y)=E_A,\ x\in E_x,\ Ax\in E_y.$$

不难验证，在上述诸例中乘法运算的所有性质被满足．

定理 设 E_x，E_y，E_z 为线性赋范空间，而且定义了乘积 $xy=z(x\in E_x,\ y\in E_y, z\in E_z)$，那么存在正常数 M 使

$$\|xy\|\leqslant M\|x\|\|y\|\ (x\in E_x,\ y\in E_y).$$

假设相反，那么对任意自然数 n 存在元 $x_n\in E_x$，$y_n\in E_y$ 使

$$\|x_ny_n\|>n^2\|x_n\|\|y_n\|.$$

因此令
$$x_n^0=\frac{1}{n\|x_n\|}x_n,\quad y_n^0=\frac{1}{n\|y_n\|}y_n,$$

我们有

$$\|x_n^0y_n^0\|=\frac{1}{n^2\|x_n\|\|y_n\|}\|x_ny_n\|>1,$$

但在另一方面

$$\|x_n^0\|=\frac{1}{n},\quad \|y_n^0\|=\frac{1}{n}.$$

因而 x_n^0 和 y_n^0 趋近于零，但范数 $\|x_n^0y_n^0\|$ 保持大于 1，这与乘法运算的连续性相矛盾．

n-线性型 设 $E_1,E_2,\cdots,E_n,E$ 为线性赋范空间，n-线性型是指函数 $a(h_1,h_2,\cdots,h_n)\in E$，$h_i\in E_i$，它关于每一变元 $h_1,h_2,\cdots,h_n$ 为线性的．

我们记 $a(h_1, h_2, \cdots, h_n) = ah_1h_2\cdots h_n$. 我们用 $\|a\|$ 代表线性型 $ah_1h_2\cdots h_n$ 的赋数，它依定义是指数[1]

$$\|a\| = \sup \frac{\|ah_1h_2\cdots h_n\|}{\|h_1\|\|h_2\|\cdots\|h_n\|}. \tag{1}$$

显然 $$\|ah_1h_2\cdots h_n\| \leqslant \|a\|\|h_1\|\|h_2\|\cdots\|h_n\|.$$

如果

$$ah_1h_2\cdots h_n = bh_1h_2\cdots h_n$$

对任意 $h_1 \in E_1$, $h_2 \in E_2$, $\cdots$, $h_n \in E_n$ 成立. 那么我们定义 $a = b$. n-线性型 $ah_1h_2\cdots h_n$, $h_i \in E_i$ $ah_1h_2\cdots h_n \in E$ 的全体构成一个线性赋范空间. 如果和与数乘了解为通常意义而范数 $\|a\|$ 则由等式(1)定义. 这时线性型 $ah_1h_2\cdots h_{n-1}$ 可以看做线性算子映 E_n 于 E, 即

$$ah_1h_2\cdots h_{n-1} \in (E_n \to E),$$

同理 $ah_1h_2\cdots h_{n-2}$ 可以看做线性算子映 E_{n-1} 于空间 $(E_n \to E)$, 即

$$ah_1h_2\cdots h_{n-2} \in (E_{n-2} \to (E_n \to E)),$$

其余类推，最后

$$a \in (E_1 \to (E_2 \to \cdots \quad (E_n \to E)\cdots)).$$

于是型 $ah_1h_2\cdots h_n$ 可以看做元 a, $h_1, h_2\cdots h_n$ 由左向右的累次乘积:

$$ah_1h_2\cdots h_n = (\cdots((ah_1)h_2)\cdots)h_n.$$

n-线性型称为**对称的**, 如果 $E_1 = E_2 = \cdots = E_n$ 且 $ah_1h_2\cdots h_n = ah_{i_1}h_{i_2}\cdots h_{i_n}$, 式中 $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 为下标 $1, 2, \cdots, n$ 的任一排列.

在实 Hilbert 空间中由自伴算子 A 所产生的双线性型

---

1) 由 Banach-Sleinhaus 定理，若 n 线性型关于每一变元连续，那么它关于所有变元的全体连续.

(Ax,y) 可作为对称型的例子.

任一线型 $ah_1\cdots h_n$ 可以对称化,如果对它令

$$Sah_1\cdots h_n=\frac{1}{n!}\sum_{(i_1,i_2,\cdots,i_n)}ah_{i_1}h_{i_2}\cdots h_{i_n}, \tag{2}$$

式中的和下标 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列 $(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ 而取的。型 $Sah_1h_2\cdots h_n$ 显然是对称的,如果说 $ah_1h_2\cdots h_n$ 为对称型的话,那么

$$Sah_1h_2\cdots h_n=ah_1h_2\cdots h_n.$$

由对称 n-线性型 $ah_1h_2\cdots h_n$ 令

$$h_1=h_2=\cdots=h_n=h$$

而得的型 $ahh\cdots h$ 称 n 次齐次型.

为了简单我们引入记号

$$ah^n=ahh\cdots h.$$

n 次齐次型的性质:

1. $a(th)^n=t^nah^n$.

2. 若 a 为对称 n 线性型,那么积 $ah_1h_2\cdots h_n$ 是可分配的且关于每一对因子为可换的. 因此,例如

$$a(t_1h_1+t_2h_2,+\cdots+t_kh_k)^n$$

可以写成

$$a(t_1h_1+t_2h_2+\cdots+t_kh_k)^n$$
$$=\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n,n_i\geqslant 0}\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}$$
$$\times t_1^{n_1}t_2^{n_2}\cdots t_k^{n_k}ah_1^{n_1}h_2^{n_2}\cdots h_k^{n_k}. \tag{3}$$

3. 对于对称 n 线性型

$$\frac{\partial^n}{\partial t_1\partial t_2\cdots\partial t_n}a(t_1h_1+t_2h_2+\cdots+t_nh_n)^n$$
$$=n!\,ah_1h_2\cdots h_n. \tag{4}$$

事实上，算子 $\frac{\partial^n}{\partial t_1 \partial t_2 \cdots \partial t_n}$ 使等式(3)的和的每一项为零，但除去所含有因子 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 的积的项而外。即是说，除去对应于指数

$$n_1 = n_2 = \cdots = n_n = 1$$

的项，这个项等于

$$n! t_1 t_2 \cdots t_n a h_1 h_2 \cdots h_n,$$

从而(4)得证。

4. 如果有等式

$$ah^n = bh^n \tag{5}$$

对任一 $h \in E_x$，那么对应 n 线性型，设它为对称时相互重合，即

$$ah_1 h_2 \cdots h_n = bh_1 h_2 \cdots h_n \tag{6}$$

对任意 $h_1, h_2, \cdots, h_n \in E_x$，亦即 $a = b$。

事实上，根据(5)对任意 $h_1, \cdots, h_n$

$$a(t_1 h_1 + t_2 h_2 + \cdots + t_n h_n)^n$$
$$= b(t_1 h_1 + t_2 h_2 + \cdots + t_n h_n)^n,$$

由此

$$\frac{\partial^n}{\partial t_1 \partial t_2 \cdots \partial t_n} a(t_1 h_1 + \cdots + t_n h_n)^n$$
$$= \frac{\partial^n}{\partial t_1 \partial t_2 \cdots \partial t_n} b(t_1 h_1 + \cdots + t_n h_n)^n,$$

再由(4)得(6)。

5. 如果给定线性算子 $A \in (E_y \to E_z)$ 和 n 次齐次型 ah^n $h \in E_x$，$ah^n \in E_y$，那么 $A(ah)^n$ 也是 n 次齐次型。

事实上，$ah_1 h_2 \cdots h_n$ 是对称 n 线性型，因为 $A(ah_1 h_2 \cdots h_n)$ 线性依赖于每一 $h_i \in Ex_i$，所以知 $A(ah_1 h_2 \cdots h_n)$ 关于 $h_1, h_2, \cdots, h_n$ 为 n 线性型且其值域于 E_z。这个型也是对

称的，所以 $A(ah^n)$ 为 n 次齐次型.

6. n 次和 m 次齐次型 $a_n h^n$ 和 $b_m h^m$ 的乘积 $(a_n h^n)(b_m h^m)$ 是 $n+m$ 次齐次型.

事实上，对应的 n-线性型和 m-线性型的积 $(a_n h_1 h_2 \cdots h_n)(b_m h_{n+1} h_{n+2} \cdots h_{n+m})$ 是 $(m+n)$ 线性型. 使之对称化得对称 $(n+m)$-线性型.

$$c_{n+m} h_1 h_2 \cdots h_{n+m} = S[(a_n h_1 h_2 \cdots h_n) \times (b_m h_{n+1} h_{n+2} \cdots h_{n+m})].$$

令
$$h_1 = h_2 = \cdots = h_{n+m} = h$$

我们得出 $(n+m)$ 次齐次型 $c_{n+m} h^{n+m}$ 而它由(2)等于 $(a_n h^n)(b_m h^m)$.

多项式 现在我们引入下述定义.

下述齐次型的和称为关于 h 的一个 n 次多项式：

$$\sum_{k=0}^{n} a_k h^k$$

式中 $h \in E_x$, $a_n \neq 0$，且所有项 $a_k h^k$ 为同一空间的元.

我们提一下多项式的最简单性质.

1. 若 $y = P_n(h) = \sum_{k=0}^{n} a_k h^k \in E_y$,

$$z = Q_m(h) = \sum_{l=0}^{m} b_l h^l \in E_z$$

依次为 h 的 n 次和 m 次多项式，并且定义了 E_y 和 E_z 的元的乘积，那么

$$yz = P_n(h) Q_m(h)$$

是关于 h 的次数不高于 $n+m$ 的多项式.

事实上由于乘法的可分配性

$$yz = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k h^k\right)\left(\sum_{l=0}^{m} b_l h^l\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{m} (a_k h^k)(b_l h^l)$$

每一项 $(a_k h^k)(b_l h^l)$ 由性质 6 是一次数为 $k + l \leqslant n + m$ 的齐次型.

因此乘积 yz 是一多项式其次数不超过 $(n + m)$. 这就是所要证明的.

2. 设 $P_n(h)$ 是关于 h 的 n 次多项式且 $Q_m(g)$ 是关于 g 的 m 次多项式. 那么对 $h = Q_m(g)$

$$P_n(h) = P_n[Q_m(g)]$$

是一关于 g 的次数不超过 nm 的多项式.

我们用关于 n 的归纳法来证明这个命题. 设 $n = 1$, 即

$$P_1(h) = a_1 h + a_0,$$

式中 a_1 为关于 h 的线性算子. 如果

$$Q_m(g) = \sum_{l=0}^{m} b_l y^l,$$

那么由前述的性质 5

$$a_1 h + a_0 = a_1 Q_m(g) + a_1 = \sum_{l=0}^{m} a_1 b_l g^l + a_0$$

是一多项式关于 g 的次数不超过 m. 因此命题对 $n = 1$ 成立.

设命题对关于 h 的所有次数 $h \leqslant n - 1$ 的多项式 $P_k(h)$ 都已证明. 我们来考虑关于 h 的 n 次多项式

$$P_n(h) = \sum_{k=0}^{n} a_k h^k.$$

我们有

$$P_n(h) = P_{n-1}(h) + a_n h^n = P_{n-1}(h) + (a_n h^{n-1})h,$$

式中 $P_{n-1}(h)$ 为关于 h 的 $n-1$ 次多项式. 如果

$$h = Q_m(g),$$

那么由假设

$$P_{n-1}(h) = R_{(n-1)m}(g), \quad a_n h^{n-1} = R^*_{(n-1)m}(g),$$

式中 $R_{(n-1)m}(g)$ 和 $R^*_{(n-1)m}(g)$ 为关于 g 的次数不超过 $(n-1)m$ 的多项式. 由此

$$P_n(h) = R_{(n-1)m}(g) + R^*_{(n-1)m}(g) Q_m(g).$$

依性质 1, 次数不超过 $(n-1)m$ 和 m 的两个多项式的积是一多项式 $R_{nm}(g)$, 它关于 g 的次数不超过 nm. 因此

$$P_n(h) = P_n[Q_m(g)] = R_{(n-1)m}(g) + R_{mn}(g) = T_{nm}(g),$$

式中 $T_{nm}(g)$ 是关于 g 的一个次数不超过 nm 的多项式. 命题证完.

§6 高阶微分与导数

记号. 设 E_x 和 E_y 为线性赋范空间, 且设 $y = f(x)$ 是抽象函数定义于 E_x 且取值于 E_y.

设 $x \in E_x$, $y_1 = y_1(x) \in E_y$ 和 $y_2 = y_2(x) \in E_y$.

记号等式

$$y_1(x) \overset{x}{\underset{n}{=\!=}} y_2(x)$$

表示

$$\|y_1(x) - y_2(x)\| = o(\|x\|^n).$$

(除去 $\|x\|$ 的高于 n 阶的无穷小量外 $y_1(x)$ 等于 $y_2(x)$).

可以证明下述诸命题:

1. 若 $y_1(x) \overset{x}{\underset{n}{=}} y_2(x)$，且 $y_2(x) \overset{x}{\underset{n}{=}} y_3(x)$，那么有 $y_1(x) \overset{x}{\underset{n}{=}} y_3(x)$.

2. 若 $y_1(x) \overset{x}{\underset{n}{=}} y_2(x)$，$x = f(\xi)$ 且 $\|\xi\| = O(\|x\|)$，那么 $y_1 \overset{\xi}{\underset{n}{=}} y_2$.

3. 设 $P(h)$ 和 $Q(h)$ 是 h 的多项式，设此两多项式的前 n 个幂的系数相等，即

$$P(h) - Q(h) = \sum_{k=n+1}^{p} a_k h^k,$$

那么
$$P(h) \overset{h}{\underset{n}{=}} Q(h).$$

我们假设在以下公式中固定的乘法运算有意义.

4. 设 $\|A(x)\|$ 在 $x = 0$ 的邻域有界，且设 $y_1(x) \overset{x}{\underset{n}{=}} y_2(x)$，那么 $A(x)y_1 \overset{x}{\underset{n}{=}} A(x)y_2$. 同理

$$y_1(x)A(x) \overset{x}{\underset{n}{=}} y_2(x)A(x).$$

5. 若 $y(x) \overset{x}{\underset{n}{=}} y_1(x)$，$z(x) \overset{x}{\underset{n}{=}} z_1(x)$，那么

$$y(x)z(x) \overset{x}{\underset{n}{=}} y_1(x)z_1(x).$$

事实上，由性质 4

$$y(x)z(x) \overset{x}{\underset{n}{=}} y(x)z_1(x) \overset{x}{\underset{n}{=}} y_1(x)z_1(x),$$

从而由性质 1 得性质 5.

Taylor 公式 我们定义过一阶强微分，把它看成函数

$f(x+h)$ 关于 h 的一次多项式近似.

今设存在多项式

$$P_n(h)=a_1h+a_2h^2+\cdots+a_nh^n$$

它关于 h 为 n 次的且使

$$f(x+h)-f(x)\overset{h}{\underset{n}{=}}P_n(h),\tag{1}$$

即
$$f(x+h)-f(x)=P_n(h)+\omega_n(x,h),$$

式中

$$\|\omega_n(x,h)\|\leqslant\varepsilon(\|h\|)\|h\|^n,\quad \varepsilon(\|h\|)\to 0\ \text{对}\ \|h\|\to 0.\tag{2}$$

多项式 $P_n(h)$ 称为对函数 $f(x+h)$ 的 **n 次 Taylor 公式**，它的第 n 项乘以 $n!$ 称函数 $f(x)$ 的 **n 阶强微分**，且函数 $f(x)$ **称为在点 x n 次可微分的**.

我们用记号 $d^nf(x,h)$ 代表 n 次强微分，我们有

$$d^nf(x,h)=n!a_nh^n.$$

对应于 $d^nf(x,h)$ 的对称 n-线性型的形式为

$$d^nf(x,h_1,h_2,\cdots,h_n)=n!a_nh_1\cdots h_n.$$

这个 n-线性型 a_n 乘以 $n!$ 称为函数 $f(x)$ 在点的 n 阶强导数，记作 $f^{(n)}(x)$. 因此

$$d^nf(x,h)=f^{(n)}(x)h^n,$$

从而公式 (1) 可以写成

$$f(x+h)-f(x)\overset{h}{\underset{n}{=}}f'(x)h+\frac{1}{2!}f''(x)h^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x)h^n.$$

现在我们注意

$$d^nf(x,h)=\frac{d^n}{dt^n}f(x+th)\Big|_{t=0}.\tag{3}$$

事实上由(1)可知

$$f(x+th)=f(x)+\sum_{k=1}^{n-1}+t^k a_k h^k+t^n a_n h^n+\omega(x,th).$$

式中

$$\lim_{t\to 0}\frac{\|\omega(x,th)\|}{t^n}=0.$$

我们有

$$\frac{d^n}{dt^n}\left(\sum_{k=1}^{n-1} t^k a_k h^k\right)=0,$$

$$\frac{d^n}{dt^n}(t^n a_n h^n)=n!\,a_n h^n.$$

最后 $$\frac{d^n}{dt^n}\omega(x,\ th)\Big|_{t=0}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\delta^n_{\Delta t}\omega(x;th)}{(\Delta t)^n}\Bigg|_{t=0}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{(\Delta t)^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k\omega$$

$$\times\left(x;\left(k-\frac{n}{2}\right)\Delta th\right).$$

由(2)对 $\Delta t\to 0$ 我们有

$$\frac{\omega\left(x,\left(k-\frac{n}{2}\right)\Delta th\right)}{(\Delta t)^n}\to 0,$$

由此 $$\frac{d^n}{dt^n}\omega(x;th)\Big|_{t=0}=0.$$

在此情形下

$$d^n f(x,h)=n!\,a_n h^n=\frac{d^n}{dt^n}f(x+th)\big|_{t=0}.$$

如果 $d^n f(x,h)$ 在某一邻域存在，且关系(2)关于 x 在

此邻域内一致成立，那么我们称 $d^n f(x,h)$ 一致强微分．在此情形下(3)式右端是一致差导数．

现在我们引入 n 阶微分另一定义．设一阶微 $df(x,h)=f'(x)h$ 在点 x 的某一邻域存在．函数 $f'(x)$，也就是说 $df(x,h)$，也可能关于 x 可微分．这样我们就导致第二累次微分

$$d[df(x,h),h_1]=d[f'(x)h,h_1]=df'(x,h_1)h.$$

记
$$df'(x,h_1)=f''(x)_0h_1,$$
我们称 $f''(x)_0$ 为第二累次导数．我们有

$$d[df(x,h),h_1]=f''(x)_0h_1h=\frac{d}{dt_1}df(x+t_1h_1,h)|_{t_1=0}$$

$$=\frac{\partial}{\partial t_1}\left[\frac{\partial}{\partial t}f(x+th+t_1h_1)|_{t=0}\right]\Big|_{t_1=0}$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t}f(x+th+t_1h_1)|_{t_1=t=0}.$$

同理可以定义 n 阶累次微分，即设 $(n-1)$ 阶累次微分

$$d(d(\cdots(df(x,h_1)h_2)\cdots)h_{n-1})=f^{(n-1)}(x)_0h_{n-1}h_{n-2}\cdots h_1$$

存在，而且设这个微分作为 x 的函数是可微的，即 $f^{(n-1)}(x)_0$ 可微，那么可得

$$\begin{aligned}&d(d(d(\cdots(df(x,h_1)h_2)\cdots)h_{n-1})h_n)\\&=d(f^{(n-1)}(x)_0h_{n-1}h_{n-2}\cdots h_1,\ h_n)\\&=df^{(n-1)}(x,h_n)h_{n-1}h_{n-2}\cdots h_1.\end{aligned}\tag{4}$$

引入记号

$$df^{(n-1)}(x,\ h_n)=f^{(n)}(x)_0h_n,$$

得 n 阶累次导数 $f^{(n)}(x)_0$ 且

$$\begin{aligned}&d(d(d(\cdots(df(x,h_1))h_2\cdots)h_{n-1})h_n)\\&=f^{(n)}(x)_0h_nh_{n-1}\cdots h_1.\end{aligned}$$

等式(4)取如下形式

$$d^nf(x,h_n,h_{n-1},\cdots h_1)=f^{(n)}(x)_0h_nh_{n-1}\cdots h_1$$

$$= \frac{\partial^n}{\partial t_1 \partial t_2 \cdots \partial t_n} f\left(x + \sum_{i=1}^{n} t_i h_i\right)\bigg|_{t_1=t_2=\cdots=t_n=0}.$$

令 $h_1 = h_2 = \cdots = h_n = h$ 可得

$$d^n f(x, h)_0 = f^{(n)}(x)_0 h^n = \frac{d^n}{dt^n} f(x + th)\big|_{t=0}. \tag{5}$$

由连续一致 n 阶差导数和累次导数的重合（见 § 1）以及公式(3)和(5)可得命题：如果在区域 G 存在 n 阶一致强微分 $d^n f(x, h)$，而且设它关于 x 连续，那么在 G 内也存在 n 阶累次微分 $d^n f(x, h)_0$，此外也有

$$d^n f(x, h)_0 = d^n f(x, h),$$

或

$$f^{(n)}(x)_0 = f^{(n)}(x).$$

反之，设存在 n 阶累次微分

$$d^n f(x, h)_0 = f^{(n)}(x)_0 h^n,$$

且 $f^{(n)}(x)_0$ 为 x 的在某一区域 G 的一致连续函数，那么在此区域内存在与之相等的 n 阶一致强微分.

我们用归纳法来证明. 对 $n = 1$，命题是平凡的. 假设它对 $n - 1$ 成立. 因为

$$f^{(n)}(x)_0 = [f'(x)_0]^{(n-1)},$$

所以我们有

$$f'(x + h)_0 = f'(x)_0 + f''(x)_0 h + \frac{1}{2!} f'''(x)_0 h^2 + \cdots$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(x)_0 h^{n-1} + \omega(x; h),$$

式中

$$\|\omega(x; h)\| \leqslant \varepsilon_{n-1}(\|h\|)\|h\|^{n-1},$$

$$\varepsilon_{n-1}(u) \to 0 \text{ 对 } u \to 0.$$

由此对 $0 \leqslant t \leqslant 1$

$$f'(x+th)_0 = f'(x)_0 + tf''(x)_0 h + \frac{1}{2!} t^2 f'''(x)_0 h^2 + \cdots$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} f^{(n)}(x)_0 h^{n-1} + \omega(x; th),$$

式中

$$\|\omega(x;\ th)\| \leqslant \varepsilon_{n-1}(t\|h\|) t^{n-1} \|h\|^{n-1} \leqslant \varepsilon_{n-1}(t\|h\|)\|h\|^{n-1}.$$

由此

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 f'(x+th)_0 h dt$$

$$= \int_0^1 \left\{ f'(x)_0 + tf''(x)_0 h + \frac{1}{2!} t^2 f'''(x)_0 h^2 + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} f^{(n)}(x)_0 h^{n-1} \right\} h dt + R_n.$$

式中

$$R_n = \int_0^1 \omega(x; th) h dt.$$

从而可得

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)_0 h + \frac{1}{2!} f''(x)_0 h^2$$

$$+ \frac{1}{3!} f'''(x)_0 h^3 + \cdots$$

$$+ \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)_0 h^n + R_n,$$

$$\|R_n\| \leqslant \int_0^1 \|\omega(x; th)\| \|h\| dt \leqslant \varepsilon_n(\|h\|)\|h\|^n,$$

$$\varepsilon_n(u) \to 0 \text{ 对 } u \to 0.$$

因此对 $f(x-(h))$的右边表达式是对 $f(x)$的 Taylor 式且

$$f^{(n)}(x)_0 h^n = d^n f(x, h),$$

即

$$d^n f(x, h)_0 = d^n f(x, h)$$

这就是所要证明的。

现在来讨论复合函数与乘积的 n 阶导数.

1. 设 $y=\varphi(x)$, $z=\psi(y)$, $x\in E_x$, $y\in E_y z\in E_z$, 于是 $z=f(x)$, 式中 $f(x)=\psi[\varphi(x)]$. 设 $y_0=\varphi(x_0)$, 且 $z_0=\psi(y_0)=f(x_0)$. 若 $\varphi(x)$ 和 $\psi(y)$ 依次在点 x_0 和 y_0 n 次可微分,那么 $f(x)$ 在点 x_0 也 n 次可微分.

事实上,依假设在 E_x 内存在 n 次多项式 $P_n(h)$ 使

$$\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)\overset{h}{\underset{n}{=}}P_n(h).$$

在另一方面在 E_y 内可定义 n 次多项式 $Q_n(g)$ 使

$$\psi(y_0+y)-\psi(y_0)\overset{g}{\underset{n}{=}}Q_n(g).$$

特别对

$$g=\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0),$$

从而对

$$\varphi(x_0+h)=\varphi(x_0)+g=y_0+g$$

我们有

$$\begin{aligned}&f(x_0+h)-f(x_0)\\&=\psi[\varphi(x_0+h)]-\psi[\varphi(x_0)]\overset{g}{\underset{n}{=}}Q_n(g),\end{aligned}\tag{6}$$

但 $$g=\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)\overset{h}{\underset{n}{=}}P_n(h),$$

因此 $$Q_n(g)\overset{h}{\underset{n}{=}}Q_n(P_n(h)).$$

由多项式性质 2, 多项式 $Q_n(P_n(h))$ 是关于 h 的多项式. 这个多项式可在必要的精确度下由关于 h 的 n 次多项式 $R_n(h)$ 逼近——$Q_n(P_n(h))$ 的片段.

$$Q_n(g)\overset{h}{\underset{n}{=}}Q_n(P_n(h))\overset{h}{\underset{n}{=}}R_n(h).\tag{7}$$

此外因为函数 φ 在点 x_0 可微. 所以

$$\|g\|=\|\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)\|=O(\|h\|),$$

因此记号 $\overset{g}{\underset{n}{=}}$ 可由记号 $\overset{h}{\underset{n}{=}}$ 代替且等式(6)取如下形式

$$f(x_0+h)-f(x_0)\overset{h}{\underset{n}{=}}Q_n(g).$$

由此由(7)可得

$$f(x_0+h)-f(x_0)\overset{h}{\underset{n}{=}}R_n(h). \tag{8}$$

存在多项式 $R_n(h)$ 满足关系(8)就证明了我们的命题.

若 $\varphi(x)$ 和 $\phi(y)$ 关于 x 均为 n 次连续可微,那么

$$f(x)=\phi[\varphi(x)]$$

关于 x 也 n 次连续可微.

事实上,在此情形下多项式 $P_n(h)$ 和 $Q_n(h)$ 的系数是 x 的连续函数. 这就是说,多项式 $Q_n(P_n(h))$ 的系数是连续函数,因而多项式 $R_n(h)$ 的系数也为连续函数.

2. 设 $x\in E_x, y=f(x)\in E_y$, $z=\varphi(x)\in E_z$, 且设定义了 $y\in E_y$ 和 $z\in E_z$ 的积 u 属于 E_u. 如果 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 是 x 的 n 次连续可微函数,那么

$$F(x)=f(x)\varphi(x)$$

也是 x 的 n 次连续可微函数.

事实上,

$$f(x+h)\overset{h}{\underset{n}{=}}f(x)+P_n(h),\ \varphi(x+h)\overset{h}{\underset{n}{=}}\varphi(x)+Q_n(h),$$

式中 $P_n(h)$ 和 $Q_n(h)$ 是关于 h 的 n 次多项式:

$$P_n(h)=\sum_{k=1}^{n}a_k(x)h^k,\quad Q_n(h)=\sum_{k=1}^{n}b_k(x)h^k,$$

且系数 $a_k(x)$ 和 $b_k(x)$ 是 x 的连续函数. 由此

$$f(x+h)\varphi(x+h)\overset{h}{\underset{n}{=}}f(x)\varphi(x)$$
$$+[f(x)Q_n(h)+P_n(h)\varphi(x)+P_n(h)Q_n(h)].$$

括弧内的式子是多项式具有系数为 x 的连续函数。除去含 h 的高于 n 次幂的项后得出多项式

$$R_n(h) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x) h^k,$$

而其系数为 x 的连续函数：

$$f(x)Q_n(h) + P_n(h)\varphi(x) + P_n(h)Q_n(h) \underset{n}{\overset{h}{=}} R_n(h).$$

因此

$$f(x+h)\varphi(x+h) \underset{n}{\overset{h}{=}} f(x)\varphi(x) + R_n(h), \tag{9}$$

等式 (9) 是说

$$F(x) = f(x)\varphi(x)$$

是 x 的 n 次连续可微函数.

最后我们再注意一下，对定义在复线性空间内泛函数来说，由在某一邻域内存在一阶微分可以断定在此邻域内存在所有高阶微分以及泛函有类似于 Taylor 级数的展开。

§7 两变元函数微分法

考虑两变元函数 $\varphi(x,y)$，式中 $x \in E_x$，$y \in E_y$，$\varphi(x, y) \in E_z$. 我们可以把 (x, y) 看做空间 E_x 和 E_y 的直和 $E_x \oplus E_y$ 的元. 函数 $\varphi(x,y)$ 称为**在点** (x_0, y_0) n **次可微分的**，如果

$$\varphi(x_0+h, y_0+g) - \varphi(x_0, y_0) \underset{n}{\overset{(h,g)}{=}} a_1(h,g) + \cdots$$

$$\cdots + a_2(h,g)^2 + \cdots + a_n(h,g)^n.$$

式中 $a_k(h,g)^k$ 是元 $(h,g) \in E_x \oplus E_y$ 的 k 次齐次型. 显然，$a_k(h,g)^k$ 是形如 $a_k h_1 h_2 \cdots h_k$ 的 n 线性型，其中每一 h_l 或为 h 或为 g。

定理 设 $\varphi(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)n$ 次可微且 $y=f(x)$ 是 x 的在点 x_0 的 n 次可微函数．而且 $y_0=f(x_0)$，那么 $\varphi(x, f(x))$ 是 x 的在点 x_0 的 n 次可微函数．

事实上，若

$$g=f(x_0+h)-f(x_0),$$

那么

$$f(x_0+h)=y_0+g$$

且

$$g\overset{h}{\underset{n}{=}}P_n(h)=a_1h+a_2h^2+\cdots+a_nh^n. \tag{1}$$

于是 $\|g\|=O(\|h\|)$，这是说

$$\|(h,g)\|=\|h\|+\|g\|=O(\|h\|). \tag{2}$$

因为 $\varphi(x,y)$ 是 (x,y) 的 n 次可微函数,所以

$$\varphi(x_0+h,y_0+g)-\varphi(x_0,y_0)\overset{h}{\underset{n}{=}}a_1(h_1,g)+a_2(h,g)^2+\cdots+a_n(h,g)^n. \tag{3}$$

(在此由(2)我们在(3)中把记号等式 $\overset{(h,g)}{\underset{n}{=}}$ 用记号等式 $\overset{h}{\underset{n}{=}}$ 代替)．但由(1)可得

$$a_k(h,g)^k\overset{h}{\underset{n}{=}}a_k(h,P_n(h))^k,$$

所以

$$\varphi(x_0+h,y_0+g)-\varphi(x_0,y_0)\overset{h}{\underset{n}{=}}\sum_{k=1}^{n}a_k(h,P_n(h))^k, \tag{4}$$

式中 $a_k(h,P_n(h))^k$ 是形如 $a_kh_1h_2\cdots h_k$ 的项的和,而在其内的每一 h_i 或为 h 或为 $P_n(h)$．因而 $a_k(h,P_n(h))^k$,从而(4)中所有和是关于 h 的多项式．今在其内除去 h 的高于 n 次的幂,我们得出一个关于 h 的 n 次多项式 $R_n(h)$，对于它

$$R_n(h)\overset{h}{\underset{n}{=}}\sum_{k=1}^{n}a_k(h,P_n(h))^k.$$

由此

$$\varphi(x_0+h,\ y_0+g)-\varphi(x_0,\ y_0)\overset{h}{\underset{n}{=}}R_n(h),$$

这就是所要证明的.

现在我们引入两变元函数的偏导数的概念，我们有

$$d\varphi[(x_0,y_0),(h,g)]=a_1(h,g)=a_1h+a_2g,$$

$$d^2\varphi[(x_0,y_0),(h,g)]=a_2(h,g)^2$$
$$=a_{11}h^2+a_{12}hg+a_{21}gh+a_{22}g^2,$$

等等. 再引入记号

$$a_1=\varphi'_x(x_0,y_0),\quad a_2=\varphi'_y(x_0,y_0),$$
$$a_{11}=\varphi''_{xx}(x_0,y_0),\quad a_{12}=\varphi''_{xy}(x_0,y_0),$$
$$a_{21}=\varphi''_{yx}(x_0,y_0),\quad a_{22}=\varphi''_{yy}(x_0,y_0).$$

我们有

$$a_1h=\varphi'_xh=\frac{d}{dt}\varphi(x_0+th,y_0)|_{t=0},$$

$$a_2g=\varphi'_yg=\frac{d}{dt}\varphi(x_0,y_0+tg)|_{t=0},$$

$$a_{11}h^2=\varphi''_{xx}h^2=\frac{d^2}{dt^2}\varphi(x_0+th,y_0)|_{t=0},$$

$$a_{12}hg=\varphi''_{xy}hg=\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}\varphi(x_0+t_1h,y_0+t_2g)|_{t_1=t_2=0},$$

$$a_{21}gh=\varphi''_{yx}gh=\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}\varphi(x_0+t_1h,y_0+t_2g)|_{t_1=t_2=0},$$

$$a_{22}g^2=\varphi''_{yy}g^2=\frac{d^2}{dt^2}\varphi(x_0,y_0+tg)|_{t=0}.$$

等等.

如果 $\varphi(x,y)$ 关于 $(x,\ y)$ 有连续二阶微分，那么 $a_{12}hg=a_{21}gh$，这是因为运算 $\frac{\partial}{\partial t_1}$ 和 $\frac{\partial}{\partial t_2}$ 可换

如果

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \varphi(x_0 + t_1 h,\ y_0 + t_2 g)$$

是 t_1 和 t_2 的连续函数的话.

§8 隐函数定理

考虑空间 E_x 和 E_y 的直和 $E_x \oplus E_y$ 以及映 $E_x \oplus E_y$ 于 E_x 的算子 $\varphi(x,y)$: $x \in E_x$, $y \in E_y$, $z = \varphi(x,y) \in E_x$.

我们假设

1) $\varphi(x_0, y_0) = 0$, (1)

2) $\varphi(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的邻域连续,

3) $\varphi(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的邻域有连续导数 $\varphi'_y(x,y)$ 且存在 $[\varphi'_y(x_0, y_0)]^{-1}$.

定理 1 如果条件 1)-3) 成立, 那么存在正常数 δ 和 ε 和算子 $y = f(x)$, $x \in E_x$, $y \in E_y$ 定义于点 x_0 的邻域 $\|x - x_0\| < \delta$ 内且使方程

$$y = f(x) \tag{2}$$

在点 x_0 的某一邻域内等价于方程

$$\varphi(x,y) = 0 \tag{3}$$

即是说, 满足方程(2)的每一对 (x, y), $\|x - x_0\| < \delta$ 也满足方程(3). 反之, 适合 $\|x - x_0\| < \delta$, $\|y - y_0\| < \varepsilon$ 且满足方程 (3) 的每一对 (x, y) 必满足(2). 算子 $f(x)$ 关于 x 连续且 $f(x_0) = y_0$.

方程 (3) 等价于下述方程

$$y = A(x,y) \tag{4}$$

式中算子 $A(x, y)$ 由下列等式决定.

$$A(x,y) = y - [\varphi'_y(x_0, y_0)]^{-1} \varphi(x,y). \tag{5}$$

为了证明方程(4)的解的存在性和唯一性，我们应用压缩映象原理.

因为

$$\frac{\partial A(x,y)}{\partial y} = I - [\varphi_y'(x_0,y_0)]^{-1}\varphi_y'(x,y)$$

$$= [\varphi_y'(x_0,y_0)]^{-1}\{\varphi_y'(x_0,y_0) - \varphi_y'(x,y)\}.$$

所以

$$\left\|\frac{\partial A(x,y)}{\partial y}\right\| \leqslant q(r), (\|x - x_0\| \leqslant r, \|y - y_0\| \leqslant r),$$

式中

$$q(r) \to 0 \text{ 对 } r \to 0 \tag{6}$$

这是由于 $\varphi_y'(x,y)$ 的连续性的假设.

因此算子 $A(x,y)$ 关于 y 满足 Lipschitz 条件

$$\|A(x,y_0) - A(x,y_2)\| \leqslant q(r)\|y_1 - y_2\| \tag{7}$$

$$\|x - x_0\| \leqslant r, \ \|y_i - y_0\| \leqslant r \quad i = 1,2,$$

此外

$$\|A(x,y_0) - y_0\| \leqslant \|[\varphi_y'(x_0,y_0)]^{-1}\|\|\varphi(x,y_0)\| \leqslant p(r)$$

$$(\|x - x_0\| \leqslant r).$$

式中

$$p(r) \to 0 \text{ 对 } r \to 0, \tag{8}$$

这是由于 $\varphi(x,y)$ 的连续性以及条件 $\varphi(x_0,y_0) = 0$.

选择 $\varepsilon > 0$ 充分小使 $q(\varepsilon) = q < 1$. 由(6)这是可能的. 由不等式(7)可知对 $\|x - x_0\| \leqslant \varepsilon$, 算子 $A(x,y)$ 在空间 E_y 的球 $\|y - y_0\| \leqslant \varepsilon$ 上是压缩算子，选择 $\delta \leqslant \varepsilon$ 充分小使

$$p(\delta) \leqslant (1 - q)\varepsilon.$$

于是对 $\|x - x_0\| \leqslant \delta$, 算子 $A(x,y)$ 映球 $\|y - y_0\| < \varepsilon$ 于具自身且方程(4)在球 $\|y - y_0\| \leqslant \varepsilon$ 内有唯一解，我们用 $y = f(x)$ 代表这个解. 我们看出 $y_0 = f(x_0)$.

为了完成定理的证明，还要指出算子 $f(x)$ 是连续的，我

们有

$$f(x)=A(x,f(x)),$$

由此

$$\begin{aligned}\|f(x)-f(x_0)\| &\leqslant \|A(x,f(x))-A(x,f(x_0))\| \\ &\quad+\|A(x,f(x_0))-A(x_0,f(x_0))\| \\ &\leqslant q\|f(x)-f(x_0)\|+\|[\varphi_y'(x_0,y_0)]^{-1}\|\|\varphi(x,y_0)\|,\end{aligned}$$

从而

$$\|f(x)-f(x_0)\| \leqslant \frac{1}{1-q}\|[\varphi_y'(x_0,y_0)]^{-1}\|\|\varphi(x,y_0)\|. \tag{9}$$

我们看出算子 $f(x)$ 在点 x_0 连续. 同理可以证明在邻域 $\|x-x_0\|\leqslant\delta$ 的另外点的连续性.

定理证完.

注 1. 根据压缩映象原理，算子 $f(x)$ 可以作为算子序列 $y=f_k(x)$, $\|x-x_0\|\leqslant\delta$, $\|f_k(x)-y_0\|\leqslant\varepsilon$ 的极限得出，其中

$$\begin{gathered}f_0(x)=y_0,\\ f_k(x)=f_{k-1}(x)-[\varphi_y'(x_0,y_0)]^{-1}\varphi(x,f_{k-1}(x)) \\ k=1,2,\cdots\end{gathered} \tag{10}$$

这时有下述收敛速度的估值式

$$\|f(x)-f_k(x)\| \leqslant \frac{q^k}{1-q}\|[\varphi_y'(x_0,y_0)]^{-1}\|\|\varphi(x,y_0)\| \tag{11}$$

注 2. 如果在所考虑的邻域内设 $\varphi_x'(x,y)$ 存在且有界，$\|\varphi_x'(x,y)\|\leqslant\alpha$，那么估值式

$$\|f(x)-f(x_0)\|\leqslant c_1\|x-x_0\| \tag{12}$$

成立. 事实上，在这个情形下

$$\|\varphi(x,y_0)\|=\|\varphi(x,y_0)-\varphi(x_0,y_0)\|\leqslant\alpha\|x-x_0\|,$$

从而由不等式(9)得所要结果.

注 3. 仍设 $\varphi'_x(x,y)$ 有界, $\|\varphi'_x(x,y)\| \leqslant \alpha$ 且 $\varphi'_y(x,y)$ 满足不等式

$$\|\varphi'_y(x,y) - \varphi'_y(x_0,y_0)\| \leqslant a\|x - x_0\| + b\|y - y_0\|. \tag{13}$$

那么有下述收敛速度的估值式成立:

$$\|f(x) - f_k(x)\| \leqslant c_2\|x - x_0\|^k\|\varphi(x,y_0)\|. \tag{14}$$

定理 2 设在定理1的条件下算子 $\varphi(x,y)$ 在 $E_x \oplus E_y$ 的点 (x_0,y_0) 的某一邻域 n 次可微, 那么算子 $y = f(x)$ 在点 x_0 的 δ-邻域内也是 x 的 n 次可微函数.

先设 $\varphi(x,y)$ 为多项式

$$\varphi(x,y) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x - x_0, y - y_0)^k.$$

令 $x - x_0 = h$, $y - y_0 = u$, $f(x) = y_0 + u(h)$. 于是算子 $u(h)$ 可作为累次逼近

$$u_0(h) = 0,$$
$$u_k(h) = u_{k-1}(h) - B^{-1}\varphi(x_0 + h,\ y_0 + u_{k-1}(h)),$$
$$B = \varphi'_y(x_0,y_0)$$

的极限而得出.

因为把一个多项式代入一个多项式内仍为一个多项式, 所以由数学归纳法可知 $u_k(h)$ 为 h 多项式.

在我们的情形,函数 $\varphi(x, y)$ 的所有一阶和二阶偏导数连续,从而在点 (x_0,y_0) 的某一邻域有界. 因此(见注 3)

$$\|u(h) - u_n(h)\| \leqslant c_2\|h\|^n\|\varphi(x_0 + h,y_0)\|.$$

因为 $u_n(h)$ 为多项式,且 $\|h\| \to 0$ 时 $\|\varphi(x_0 + h,y_0)\| \to 0$, 所以最后这个不等式是说 $u(h)$ 在点 $h = 0$ n 次可微. 从而 $y = f(x)$ 在点 $x = x_0$ n 次可微.

现在转到一般的情形,依定理的条件

$$\varphi(x,y)=\tilde{\varphi}(x,y)+(\|x-x_0\|$$
$$+\|y-y_0\|)^n\omega(x-x_0,\ y-y_0),$$

式中

$$\tilde{\varphi}(x,y)=\sum_{k=1}^{n}a_k(x-x_0,y-y_0)^k$$

且 $\|\omega(x-x_0,\ y-y_0)\|\to 0$ 对 $\|x-x_0\|,\ \|y-y_0\|\to 0$.

因为函数 $\tilde{\varphi}(x,\ y)$ 满足定理 1 的所有条件而且是多项式，所以存在 n 次可微分算子 $\tilde{f}(x)$ 使 $\tilde{\varphi}(x,\tilde{f}(x))=0$.

由恒等式

$$f(x)=B^{-1}(Bf(x)-\varphi(x,f(x))),$$
$$\tilde{f}(x)=B^{-1}(B\tilde{f}(x)-\tilde{\varphi}(x,\tilde{f}(x)))$$

可得

$$\begin{aligned}\|f(x)-\tilde{f}(x)\|&\leqslant\|B^{-1}\|\|B(f(x)-\tilde{f}(x))-\varphi(x,f(x))\\&\quad+\varphi(x,\tilde{f}(x))-\varphi(x,\tilde{f}(x))+\tilde{\varphi}(x,\tilde{f}(x))\|\\&\leqslant\|B^{-1}\|\|B(f(x)-\tilde{f}(x))-(\varphi(x,f(x))\\&\quad-\varphi(x,\tilde{f}(x)))\|+\|B^{-1}\|\|\varphi(x,\tilde{f}(x))\\&\quad-\tilde{\varphi}(x,\tilde{f}(x))\|.\end{aligned}\tag{15}$$

现在我们引入算子 $B(x,y,\tilde{y})$ 令

$$\begin{aligned}&\varphi(x,y)-\varphi(x,\tilde{y})\\&=\int_0^1\varphi_y'((x,\tilde{y})+t(y-\tilde{y}))dt(y-\tilde{y})\\&=B(x,y,\tilde{y})(y-\tilde{y}).\end{aligned}$$

不难验证，$B(x,\ y,\ \tilde{y})$ 关于所有变量连续而且当 $x\to x_0$, $\tilde{y}\to y_0$ 时 $B(x,y,\tilde{y})\to B$. 由算子 $f(x)$ 和 $\tilde{f}(x)$ 的连续性可以找到 $\delta_0>0$ 使

$$\|B^{-1}\|\|B-B(x,f(x),\tilde{f}(x))\|\leqslant q<1\ \text{对}\ \|x-x_0\|\leqslant\delta_0.\tag{16}$$

于是由不等式(15)可得

$$\|f(x)-\tilde{f}(x)\| \leqslant \frac{1}{1-q}\|B^{-1}\|\|\varphi(x,\tilde{f}(x))$$

$$-\tilde{\varphi}(x,\tilde{f}(x))\|,$$

从而由 $\|\tilde{f}(x)-y_0\| \leqslant c_1\|x-x_0\|$（见注 2）有

$$\|f(x)-\tilde{f}(x)\| \leqslant c\|\varphi(x,\tilde{f}(x))-\tilde{\varphi}(x,\tilde{f}(x))\|$$

$$\leqslant c(\|x-x_0\|+\|\tilde{f}(x)-y_0\|)^n\|\omega(x-x_0,\tilde{f}(x)-y_0)\|$$

$$\leqslant c(1+c_1)^n\|x-x_0\|^n\|\omega(x-x_0,\tilde{f}(x)-y_0)\|.$$

我们看出

$$f(x) \underset{n}{\overset{x-x_0}{=\!=}} \tilde{f}(x). \tag{17}$$

因为算子 $\tilde{f}(x)$ 在点 x_0 n 次可微，所以由最后这一关系可知算子 $f(x)$ 在点 x_0 也 n 次可微.

类似推理指出算子 $f(x)$ 在球 $\|x-x_0\|<\delta$ 的其余的点可微.

最后我们再指出

$$df(x_0,h)=-[\varphi_y'(x_0,y_0)]^{-1}\varphi_x'(x_0,y_0)h, \tag{18}$$

即 $$f'(x_0)=-[\varphi_y'(x_0,y_0)]^{-1}\varphi_x'(x_0,y_0).$$

事实上，依定义 $u_1(h)$ 是算子（关于 h 的多项式）使

$$df(x_0,h)=d\tilde{f}(x_0,h)\underset{1}{\overset{h}{=\!=}}u_1(h).$$

因为 $$\varphi(x_0+h,y_0)$$

$$=\varphi(x_0+h,y_0)-\varphi(x_0,y_0)\underset{1}{\overset{h}{=\!=}}\varphi_x'(x_0,y_0)h,$$

所以

$$u_1(h)=-[\varphi_y'(x_0,y_0)]^{-1}\varphi(x_0+h,y_0)\underset{1}{\overset{h}{=\!=}}$$

$$-[\varphi_y'(x_0,y_0)]^{-1}\varphi_x'(x_0,y_0)h,$$

由此得(18).

§9 隐函数定理的应用

依方程变化的解的变化 考虑函数 $f(x)$ 的空间 $C'(G,E)$，其中函数 $f(x)$ 定义在空间 E 的某一区域且取值于同一空间：$x\in G$，$f(x)\in E$，且函数 $f(x)$ 可微，$f(x),f'(x)$ 连续且关于范数有界．设 $\|f\|=\sup(\|f(x)\|+\|f'(x)\|)$．$C'[G,E]$ 是一线性赋范空间．

考虑方程

$$f(x)=0, x\in G,\ f\in C'[G,E].$$

设 $f_0(x_0)=0$ 对某一 $x_0\in G$ 且算子 $f'_0(x_0)\in(E\to E)$ 有逆．于是有下述定理成立．

定理 1 存在这样常数 $\delta>0$，$\varepsilon>0$ 使得对满足 $\|f-f_0\|<\delta$ 的任意 $f\in C'[G,E]$，方程 $f(x)=0$ 有解 $x=x_0+\Delta x$，式中 $\|\Delta x\|<\varepsilon$．这时当 $f\to f_0$ 时有 $\Delta x\to 0$．

事实上，我们把 $f(x)$ 看作 $x\in G$ 和 $f\in C'[G,E]$ 的函数：$f(x)=\Phi(f,x)$．由函数 $\Phi(f,x)$ 的构造可知 $\Phi(f,x)$ 和 $\Phi'_x(f,x)$ 连续．

这时 $\Phi'_x(f,x)=f'(x)$．依假设 $f_0(x_0)=0$ 且 $[f'_0(x_0)]^{-1}$ 存在．这就是说 $\Phi(f_0,x_0)=0$ 且 $[\Phi'_x(f_0,x_0)]^{-1}$ 存在．由隐函数存在定理，对某一 $\delta>0$ 和 $\varepsilon>0$，方程

$$\Phi(f_0+\Delta f,x_0+\Delta x)=0$$

对 $\|\Delta f\|<\delta$ 有解 $x_0+\Delta x$，即 $f(x)=0$，$f=f_0+\Delta f_1$，$x=x_0+\Delta x$，而且 $\|\Delta x\|<\varepsilon$．这时若 $\delta\to 0$ 那么 $\|\Delta x\|\to 0$．定理证完．

注意，对 $\Phi(f,x)=f(x)$ 存在微分

$$\Phi'_f(f,x)\Delta f=\Delta f.$$

由存在 $\Phi'_f(f,x)$ 可知 x 是 f 的可微函数，且

$$\Delta x \frac{\Delta f}{1} - [\Phi'_x(f_0,x_0)]^{-1}\Phi'_f(f_0, x_0)\Delta f = -[f'(x_0)]^{-1}\Delta f.$$

这个等式的右端是函数 $x=\varphi(f)$ 对 $x=x_0$ 的一致微分，即 $d\varphi(f_0,\Delta f)$.

对本征元的应用 我们未考虑直和 $H_1 = H \oplus R$，其中 H为一实 Hilbert 空间，R为数值线. H_1的每一元为 $\{x,t\}$ 的形式，$x \in H$，$t \in R$.

设 f 是一非线性算子定义于 H_1 上且其值域于同空间。设 f 由下述等式给定

$$f(A,x,t) = \{y, \tau\} x \in H, \ t \in R$$

式中

$$y = Ax - tx \in H, \ \tau = (x,x) - 1,$$

且A为 $(H \to H)$ 内全连续自伴线性算子.

方程式 $f(A;x,t)=0$ 的形式为

$$Ax - tx = 0, \ (x, x) = 1,$$

即 t 为本征值，而 x 为算子 A的对应规范本征元. 如果给 $\{x, t\}$ 以增量 $\{\Delta x, \Delta t\}$，那么 $f(A; x,t)$ 也得到对应的增量.

$$\{A\Delta x - t\Delta x - \Delta t x - \Delta t \Delta x, 2(x,\Delta x) + (\Delta x,\Delta x)\}.$$

这个增量的主要线性部分是

$$d_{H_1}f(A;x,t,\Delta x,\Delta t) = \{A\Delta x - t\Delta x - \Delta t x, 2(x,\Delta x)\}.$$

从而 $f'(A; x,t)$ 是 $(H_1 \to H_1)$ 内线性算子变 $\{\Delta x, \Delta t\}$ 于 $\{A\Delta x - t\Delta x - x\Delta t, 2(x, \Delta x)\}$.

如果 t_0是算子 A_0 的简单本征值[1]，且 x_0 为对应本征值，那么存在逆算子 $[f'_{H_1}(A_0,x_0,t_0)]^{-1}$，即对任一 $\{y,\tau\} \in H_1$ 方程

$$A_0\Delta x - t_0\Delta x - x_0\Delta t = y, \ 2(x_0, \Delta x) = \tau \tag{1}$$

1) 即重度为一的本征值.

有解 $\{\Delta x, \Delta t\}$ 而且此解唯一。

事实上，$\Delta x = ax_0 + (\Delta x)_1$，其中 $a = (\Delta x, x_0)$ 且 $((\Delta x)_1, x_0) = 0$. 同理 $y = bx_0 + y_1$，其中 $b = (y, x_0)$ 且 $(y_1, x_0) = 0$。此外，因为 $(A_0 - t_0E)x_0 = 0$，所以

$$(A_0\Delta x - t_0\Delta x) - x_0\Delta t = (A_0 - t_0E)(\Delta x)_1 - x_0\Delta t$$

且
$$((A_0 - t_0E)(\Delta x)_1, x_0) = ((A_0 - t_0E)x_0, (\Delta x)_1) = 0,$$

由此由方程(1)

$$(A_0 - t_0E)(\Delta x)_1 = y_1, \tag{2}$$

$$\Delta t = -b = -(y, x_0), \ 2a = \tau. \tag{3}$$

因为方程(2)的右端与 x_0 正交（即它与本征值 t_0 相对应的所有本征元成正交），所以这个方程有唯一解正交于 x_0:

$$\begin{aligned}(\Delta x)_1 &= (A_0 - t_0E)_1^{-1}y_1 \\ &= (A_0 - t_0E)_1^{-1}[y - (y, x_0)x_0],\end{aligned}$$

式中 $(A_0 - t_0E)_1$ 代表算子 $A_0 - t_0E$ 在与 x_0 成正交的子空间的元上的限制。

因此，方程(1)对任意 $\{y, \tau\} \in H_1$ 有解

$$\Delta x = \frac{\tau}{2}x_0 + (A_0 - t_0E)_1^{-1}[y - (y, x_0)x_0],$$

$$\Delta t = -(y, x_0).$$

由此得出算子 $[f'(A_0; x_0, t_0)]^{-1}$ 的存在。

由前述定理存在常数 $\delta > 0$ 和 $\varepsilon > 0$ 使对 $\|\Delta A\| < \delta$ 时，存在算子 $A = A_0 + \Delta A$ 的本征值 $t_0 + \Delta t$ 和规范本征元 $x_0 + \Delta x$，

$$[(A_0 + \Delta A) - (t + \Delta t)E](x_0 + \Delta x) = 0.$$

$$(x_0 + \Delta x, x_0 + \Delta x) = 1$$

而且对 $\|\Delta x\| + |\Delta t| < \varepsilon$，这样本征值和本征元是唯一的。

$\{\Delta x, \Delta t\}$ 的头一个近似 $\{\Delta_1 x, \Delta_1 t\}$ 可由方程

$$A_0\Delta_1 x - t_0\Delta_1 x - \Delta_1 t x_0 + \Delta A x_0 = 0$$

$$(x_0, \Delta_1 x) = 0$$

得出. 求第一个方程与 x_0 的内积并注意

$$((A_0 - t_0E)\Delta_1 x, x_0) = ((A_0 - t_0E)x_0, \Delta_1 x) = 0,$$

可得

$$\Delta_1 t = (\Delta A x_0, x_0).$$

此外 $$(A_0 - t_0E)\Delta_1 x = \Delta_1 t x_0 - \Delta A x_0. \tag{4}$$

方程(4)常有解, 因为(4)的右端与 x_0 成正交:

$$(\Delta_1 t x_0, x_0) - (\Delta A x_0, x_0) = \Delta_1 t - (\Delta A x_0, x_0) = 0.$$

从而

$$\Delta_1 x = (A_0 - t_0E)_1^{-1}[\Delta_1 t x_0 - \Delta A x_0].$$

含参变数的方程

定理 2 设 $y = y(t, x)$ 是元 $x \in E$ 及数值参数 t 的函数且具有值域于同一空间 E. 此外设函数 $y(t, x)$ 关于 t 和 x 为 n 次可微分而且对 $t = t_0$ 方程 $y(t_0, x) = 0$ 有解 $x = x_0$. 此外设算子 $[y'_x(t_0, x_0)]^{-1}$ 存在. 由于是存在常数 $\delta > 0$ 和 $\varepsilon > 0$ 使对 $|t - t_0| < \delta$ 时方程

$$y(t, x) = 0 \tag{5}$$

有唯一解 $x = x(t)$ 满足

$$\|x(t) - x_0\| < \varepsilon.$$

这个解 $x(t)$; 作为 t 的函数 n 次可微分.

上面所说这个定理是隐函数定理的直接推论.

例 设 $A(t)$ 是 $(H \to H)$ 内全连续线性算子, 且 $A(t)$ 作为 t 的函数 n 次可微分. 又设算子 $A(t_0)$ 有简单本征值 λ_0 和对应规范本征元 x_0:

$$A(t_0)x_0 - \lambda_0 x_0 = 0.$$

考虑直和 $H_1 = H \oplus R$ 并定义函数

$$\Phi(t, x, \lambda),\ \{x, \lambda\} \in H \oplus R,\ \Phi(t, x, \lambda) \in H \oplus R,$$

而设

$$\Phi(t,x,\lambda)=\{A(t)x-\lambda x,(x,x)-1\}.$$

算子 $A(t)$ 的规范本征元 $x(t)$ 和本征值 $\lambda(t)$ 的方程有如下形式

$$\Phi(t,x,\lambda)=0.$$

因为 $A(t)$ 关于 t 是 n 次可微的，所以 $\Phi(t,x,\lambda)$ 关于 t 也 n 次可微的。有如前述，可以断定

$$\left[\frac{\partial}{\partial\{x,\lambda\}}\Phi(t_0;\ x_0,\lambda_0)\right]^{-1}$$

存在．应用上述定理 2 可知方程

$$\Phi(t;x,\lambda)=0,$$

即方程

$$A(t)x-\lambda x=0,\ (x,x)=1 \tag{6}$$

有解 $\{x(t),\lambda(t)\}$，且此解为参数 t 的 n 次可微分函数．

变分方程 在本节定理 2 的假设下，方程 (5) 的解 $x(t)$ 是关于参数 t 的可微分函数．我们称 $x(t)$ 关于 t 在点 $t=t_0$ 的导数 $x'(t)$ 为它的变分 δx：

$$\delta x=\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0}.$$

从而对 $y=y(t,x)$——

$$\delta y=\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=t_0}.$$

方程

$$y(t,x(t))=0$$

是恒等式，而且关于 t 微分可得

$$\frac{\partial y(t,x(t))}{\partial t}+\frac{\partial y(t,x(t))}{\partial x}x'(t)=0.$$

对 $t=t_0$，我们有

$$\delta y + y'_x(t_0, x_0)\delta x = 0 \tag{7}$$

这个方程称原方程. $y(t, x) = 0$ 的变分方程.

因为 $[y'_x(t_0, x_0)]^{-1}$ 存在,所以

$$\delta x = -[y'_x(t_0, x_0)]^{-1}\delta y. \tag{8}$$

方程 $(A - \lambda E)\Delta x + \Delta A x - \Delta\lambda x = 0$ 例如可以看做方程(6)的变分方程,如果依次用 $\delta A, \delta x, \delta\lambda$ 代替 $\Delta A, \Delta x, \Delta\lambda$ 的话:

$$\delta x = -(A - \lambda E)_1^{-1}(\delta A x - \delta\lambda x), \quad \delta\lambda = (\delta A x, x).$$

对微分方程的应用 现在我们回到具有初始条件的微分方程

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(0) = x_0 \tag{9}$$

在此 $f(t,x)$ 和 x 是空间 E 的元. 这个问题等价于积分方程

$$x(t) - x_0 - \int_0^t f(\tau, x(\tau))d\tau = 0 \tag{10}$$

我们用 $F(x_0, x(t))$ 代表方程(10)的左边. 函数 $x(t) = C_1^E[0,1]$[1], 且 $F(x_0, x(t))$ 是算子映直和

$$E \oplus C_1^E[0,1]$$

于 $C_1^E[0,1]$. 如果 $f(t,x)$ 是 x 的 n 次可微函数而且 $\dfrac{\partial^n f(t,x)}{\partial x^n}$ 关于 (t,x) 连续, 那么 $x(t) - \int_0^t f(\tau, x(\tau))d\tau$ 是 $C_1^E[0,1]$ 到 $C_1^E[0,1]$ 内 n 次可微算子. 由此得出 $F(x_0, x(t))$ 是关于 $x(t)$ n 次可微算子. 又因为 x_0 是作为个别的一项而含于 F 的,所以 F 在

$$E \oplus C_1^E[0,1]$$

内是 n 次可微函数.

---

1) C_1^E 是所有连续可微函数 $x(t)$ 的集,其中 $t \in [0,1]$ 且 $x(t) \in E$.

如果给 $x=x(t)$ 以增量 $\Delta x=\Delta x(t)$，那么 $F(x_0,x)$ 的相应增量的主要线性部分是

$$F'_x\Delta x=\Delta x(t)-\int_0^t f'_x(\tau,x(\tau))\Delta x(\tau)d\tau. \tag{11}$$

(11)右端是 $C_1^E[0,1]$ 到 $C_1^E[0,1]$ 内算子.

这个算子有逆．事实上，对 $C_1^E[0,1]$ 内任一 $y(t)$ 方程

$$F'_x\Delta x=y(t)$$

或
$$\Delta x(t)-\int_0^t f'_x(\tau,x(\tau))\Delta x(\tau)d\tau=y(t)$$

等价于关于 $\Delta x(t)$ 的微分方程

$$\frac{d\Delta x(\tau)}{dt}=f'_x(t,x(t))\Delta x(t)+y'(t) \text{ 和 } \Delta x(0)=y(0).$$

由存在定理最后这个方程有唯一解（右边关于 $\Delta x(t)$ 线性，从而关于 Δx 的 Lipschitz 条件自然地成立）．这个解实现了逆算子

$$\Delta x(t)=\Delta x=[F'_x]^{-1}y(t).$$

这样我们就找到了使用隐函数定理的条件．

方程(9)的解可以看做初值 x_0 的函数：$x=x(t,x_0)$，而且 $x(t,x_0)$ 关于 x_0 n 次可微分．

特别，若 E 为 n 维空间，那么我们就得出解关于初值的连续可微依赖性．

§10 切向流形

直和的情形 设函数 $\varphi(x)$ 映 Banach 空间 E_x 于 Banach 空间 E_y：$x\in E_x$，$\varphi(x)\in E_y$．考虑满足方程

$$\varphi(x)=0$$

的点的全体 $\mathfrak{M}$.

设 $\varphi(x_0)=0$，即 $x_0\in\mathfrak{M}$，且设函数 $\varphi(x)$ 在点 x_0 的某一邻域连续可微:

$$\varphi(x_0+h)\overset{h}{\underset{1}{=}}\varphi'(x_0)h.$$

如果算子 $\varphi'(x_0)\in(E_x\to E_y)$ 映空间 E_x 于整个空间 E_y 上，我们就称 x_0 为正常点.

以后我们将认为 x_0 为正常点. 用 T_0 代表使得

$$\varphi'(x_0)h=0$$

的元 $h\in E$ 的全体. T_0 是空间 E 的一个子空间.

我们称元 x_0+h, $h\in T_0$ 的全体 T_{x_0} 为流形$\mathfrak{M}$在点 x_0 的**线性切向流形**.

我们首先考虑 E_x 是子空间 T_0 和某一子空 T_ξ 的直和的情形. 每一元 $x\in E_x$ 可以写成

$$x=h+\xi \quad h\in T_0,\ \xi\in T_\xi$$

的形式.

线性算子 $\varphi'(x_0)$ 映 T_ξ 于整个空间 E_y 上. 事实上, $\varphi'(x_0)$ 映 E_x 于整个空间 E_y 上，这就是说，对每一 $y\in E_y$ 存在元 $x\in E_x$ 使

$$\varphi'(x_0)x=y,$$

但 $x=h+\xi$, $h\in T_0$, $\xi\in T_\xi$ 且 $\varphi'(x_0)h=0$. 所以

$$\varphi'(x_0)\xi=\varphi'(x_0)x=y,$$

由下面等式定义 $(T_\xi\to E_y)$ 内线性算子 A:

$$A\xi=\varphi'(x_0)\xi.$$

由刚才所说的，算子 A 映 T_ξ 于整个空间 T_y. 这时若 $\xi_1\xi_2\in T_\xi$，且 $A\xi_1=A\xi_2$，那么 $\xi_1=\xi_2$. 事实上，令

$$A(\xi_1-\xi_2)=0,\quad 即\ \varphi'(x_0)(\xi_1-\xi_2)=0.$$

由此 $$\xi_1-\xi_2\in T_0,$$

但 E_x 是 T_0 和 T_ξ 的直和，所以 $\xi_1-\xi_2=0$, $\xi_1=\xi_2$.

依 Banach 定理 A 有有界逆线性算子 A^{-1}.

定理 1 设空间 E_x 是子空间 T_0 和 T_ξ 的直和，那么存在拓扑映射，即一一对应且双方连续的映射，映 x_0 在流形 $\mathfrak{M}$ 内某邻域于其在线性切向流 T_{x_0} 内某邻域. 此外对应点之间的距离和它们到切点 x_0 的距离相比较是高阶无穷小量.

在点 x_0 的邻域的元 x 是如下形式

$$x = x_0 + h + \xi, h \in T_0, \xi \in T_\xi.$$

流形 $\mathfrak{M}$ 的方程可以写成

$$\Phi(h,\xi) = \varphi(x_0 + h + \xi) = 0. \tag{1}$$

对 $h = \xi = 0$，也有 $\Phi(0, 0) = 0$. 此外关于增量 $\Delta\xi$ 对 $h = \xi = 0$ 时函数 $\Phi(h,\xi)$ 的偏微分有如下形式

$$\Phi'_\xi(0,0)\Delta\xi = \varphi'(x_0)\Delta\xi = A\Delta\xi. \tag{2}$$

算子 $A = \Phi'_\xi(0,0)$ 有逆. 所以由隐函数定理，在点 $h = 0$，$\xi = 0$ 的邻域方程(1)等价于方程

$$\xi = \psi(h).$$

式中 $\psi(h)$ 为可微分函数满足条件 $\psi(0) = 0$. 因此在点 x_0 的邻域内的每一点 $x \in \mathfrak{M}$ 有

$$x = x_0 + h + \psi(h),\ h \in T_0,\ \psi(h) \in T_\xi.$$

这样，我们就构造了 x_0 在 T_{x_0} 内邻域的点 $\bar{x} = x_0 + h$ 到 x_0 在 $\mathfrak{M}$ 内的邻域的点 $x = x_0 + h + \psi(h)$ 上的映象，此映象是一一对应的双方连续的(即拓扑的). 由等式

$$\Phi'_h(0,0)h + \Phi'_\xi(0,0)\psi'(0)h$$
$$= \Phi'_h(0,0)h + A\psi'(0)h = 0$$

我们有

$$d\psi(0,h) = \psi'(0)h = -A^{-1}\Phi'_h(0,0)h$$
$$= -A^{-1}\varphi'(x_0)h = 0.$$

因此

$$\psi(h) \xrightarrow[1]{h} \psi(0) + \psi'(0)h = 0,$$

即 $\|\psi(h)\| = 0(\|h\|)$.

但 $\|\psi(h)\|$ 是线性切向流形 T_x 的点 $x_0 + h$ 到流形 $\mathfrak{M}$ 的对应点

$$x = x_0 + h + \psi(h)$$

的距离. 这个距离与 $\|h\|$ 或 $\|h + \psi(h)\|$ 比较是高阶无穷小,即与点 $x_0 + h$ 和 $x_0 + h + \psi(h)$ 到切点 x_0 的距离相比较是高阶无穷小量. 这就是所要证明的.

一般情形 在一般情形我们不可能断定存在这样子空间 T_ξ 使

$$E_x = T_0 \oplus T_\xi.$$

但以下将看到，即在一般情形，定理 1 在某些较弱形式下成立.

我们构造关于 T_0（见第二章第一节）的剩余类所成的商空间 E_x/T_0. 商空间 E_x/T_0 的每一元 T 是空间 E_x 的元的某一集，而且若 x_1 和 $x_2 \in T$，那么 $x_1 - x_2 \in T_0$，即

$$\varphi'(x_0)(x_1 - x_2) = 0,$$

因此
$$\varphi'(x_0)x_1 = \varphi'(x_0)x_2.$$

算子 $\varphi'(x_0) \in (E_x \to E_y)$ 映 T 的任两点 x_1 和 x_2 于 E_y 的同一元. 反之,如果

$$\varphi'(x_0)x_1 = \varphi'(x_0)x_2,$$

那么
$$\varphi'(x_0)(x_1 - x_2) = 0, \text{ 即 } x_1 - x_2 \in T_0.$$

这就是说 x_1 和 x_2 属于 E_x/T_0 内的同一类. 由此可知算子 $\varphi'(x_0)$ 产生某一线性算子 A 映 E_x/T_0 于 E_y 内. 即是说，若 $T \in E_x/T_0$，那么

$$AT = \varphi'(x_0)x$$

式中 x 是 T 的任一点. 由上所述 AT 不依赖于 T 内的点 x 的

选择.

设 y 为 E_y 内任一点. 依假设算子 $\varphi'(x_0)$ 映 E_x 于整个空间 E_y. 因此存在元 $x\in E_x$ 使得有 $\varphi'(x_0)x=y$. 但 x 总属于 E_x/T_0 内某一 T. 依定义

$$AT=\varphi'(x_0)x=y.$$

因此算子 A 有逆 A^{-1}. 再依 Banach 定理 A^{-1} 也有界.

定理 2 对流形 $\mathfrak{M}$ 的每一点可使切向流形 T_{x_0} 的这样点 $\bar{x}$ 与之对应,而反之,对切向流形 T_{x_0} 的每一点 $\bar{x}$ 可使 $\mathfrak{M}$ 的这样点 x 与之对应, 使得它们之间的距离与这些点到切点 x_0 的距离相比较高阶无穷小量(这个对应一般说不是唯一的).

这个定理的证明是隐函数定理的证明的某些变更, 而且它是隐函数定理的直接推广.

设 $h\in T_0$. 构造 E_x/T_0 内元的序列 $\{T_n\}$ 和点列 $\{\xi_n\}$, $\xi_n\in T_n$ 如下: $\xi_0=0\in T_0$. 设已经构造了 T_i,ξ_i, 对 $i=1,2,\cdots,n-1$. 那么定义 T_n 和 ξ_n 如下:

$$T_n=T_{n-1}-A^{-1}\varphi(x_0+h+\xi_{n-1}). \tag{3}$$

此外在 T_n 内选某一点 ξ_n 使

$$\|\xi_n-\xi_{n-1}\|\leqslant 2\|T_n-T_{n-1}\|.$$

这个选择是可能的,因为

$$\|T_n-T_{n-1}\|=\inf_{\xi\in T_n}\|\xi-\xi_{n-1}\|.$$

由于 $$\xi_{n-1}\in T_{n-1},$$

所以依算子 A 的定义有

$$AT_{n-1}=\varphi'(x_0)\xi_{n-1}.$$

由此 (3) 可以写成

$$T_n=-A^{-1}[\varphi(x_0+h+\xi_{n-1})-\varphi'(x_0)\xi_{n-1}].$$

又因为

$$T_{n-1}=-A^{-1}[\varphi(x_0+h+\xi_{n-2})-\varphi'(x_0)\xi_{n-2}],$$

所以

$$T_n - T_{n-1} = -A^{-1}[\varphi(x_0 + h + \xi_{n-1}) \\ - \varphi(x_0 + h + \xi_{n-2}) - \varphi'(x_0)(\xi_{n-1} - \xi_{n-2})].$$

令
$$\xi_t = \xi_{n-2} + t(\xi_{n-1} - \xi_{n-2}),$$

我们有

$$\varphi(x_0 + h + \xi_{n-1}) - \varphi(x_0 + h + \xi_{n-2}) \\ = \int_0^1 \varphi'(x_0 + h + \xi_t)dt(\xi_{n-1} - \xi_{n-2}).$$

由此

$$T_n - T_{n-1} = -A^{-1}\int_0^1 [\varphi'(x_0 + h + \xi_t) - \varphi'(x_0)]dt \\ \cdot (\xi_{n-1} - \xi_{n-2}). \tag{4}$$

令
$$\|h\| \leqslant r,\ \|\xi_{n-1}\| \leqslant r, \|\xi_{n-2}\| \leqslant r,$$

于是
$$\|\xi_t\| \leqslant r.$$

这就是说
$$\|h + \xi_t\| \leqslant 2r.$$

由于 $\varphi'(x)$ 在点 x_0 的连续性，对每一 $\varepsilon > 0$ 存在 $r > 0$ 使得

$$\|\varphi'(x) - \varphi'(x_0)\| < \varepsilon \quad 对 \quad \|x - x_0\| < 2r.$$

由此

$$\|\varphi'(x_0 + h + \xi_t) - \varphi'(x_0)\| < \varepsilon.$$

且由 (4) 可得

$$\|T_n - T_{n-1}\| \leqslant \|A^{-1}\| \int_0^1 \|\varphi'(x_0 + h + \xi_t) - \varphi'(x_0)\| dt \\ \cdot \|\xi_{n-1} - \xi_{n-2}\| \leqslant \|A^{-1}\|\varepsilon\|\xi_{n-1} - \xi_{n-2}\|,$$

$$\|\xi_n - \xi_{n-1}\| \leqslant 2\|T_n - T_{n-1}\| \\ \leqslant 2\|A^{-1}\|\varepsilon\|\xi_{n-1} - \xi_{n-2}\|.$$

选 ε 使

$$2\|A^{-1}\|\varepsilon \leqslant \frac{1}{2},$$

这就是说

$$\|\xi_n - \xi_{n-1}\| \leqslant \frac{1}{2} \|\xi_{n-1} - \xi_{n-2}\|.$$

令 $\|h\| = r$，如果 $\|\xi_i\| \leqslant r$，$i = 1, 2, \cdots n-1$，那么

$$\|\xi_n - \xi_{n-1}\| \leqslant \frac{1}{2}\|\xi_{n-1} - \xi_{n-2}\| \leqslant \cdots$$

$$\cdots \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}\|\xi_1 - \xi_0\| = \frac{1}{2^{n-1}}\|\xi_1\|.$$

且

$$\begin{aligned}\|\xi_n\| &= \|\xi_1 + (\xi_2 - \xi_1) + \cdots + (\xi_n - \xi_{n-1})\| \\ &\leqslant \|\xi_1\| + \|\xi_2 - \xi_1\| + \cdots + \|\xi_n - \xi_{n-1}\| \\ &\leqslant \|\xi_1\|\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \leqslant 2\|\xi_1\|.\end{aligned}$$

因为 $\xi_0 = 0$，所以 $T_1 = -A^{-1}\varphi(x_0 + h)$ 且

$$\|\xi_1\| \leqslant 2\|T_1\| \leqslant 2\|A^{-1}\|\|\varphi(x_0 + h)\|.$$

此外

$$\varphi(x_0 + h) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)h + \varepsilon(h)$$

$$\varepsilon(h) = o(\|h\|),$$

但 $\varphi(x_0) = 0$，此外 $h \in T_0$，所以

$$\varphi'(x_0)h = 0.$$

因此 $$\varphi(x_0 + h) = \varepsilon(h).$$

由此 $$\|\xi_1\| \leqslant 2\|A^{-1}\|\|\varepsilon(h)\|. \tag{5}$$

对充分小 $r > 0$ 和 $\|h\| \leqslant r$

$$\|\varepsilon(h)\| \leqslant \frac{1}{4\|A^{-1}\|}\|h\|.$$

因之

$$\|\xi_1\| \leqslant \frac{1}{2}\|h\| \leqslant \frac{1}{2}r.$$

这就是说 $$\|\xi_n\| \leqslant r.$$

我们也就找到了

$$\|\xi_n - \xi_{n-1}\| \leqslant \frac{1}{2}\|\xi_{n-1} - \xi_{n-2}\|.$$

因此序列 $\{\xi_n\}$ 收敛于元 $\xi \in E_x$ 且 $\|\xi\| \leqslant \|h\|$. 不仅此，由(5)

$$\|\xi\| \leqslant 2\|\xi_1\| \leqslant 4\|A^{-1}\|\|\varepsilon(h)\|. \tag{6}$$

随之 E_x/T_0 的元 T_n 收敛于 E_x/T_0 的元 T 且 $\xi \in T$.

方程(3)对 $n \to \infty$, $\xi_n \to \xi$, $T_n \to T$ 成为

$$T = T - A^{-1}\varphi(x_0 + h + \xi),$$

或

$$A^{-1}\varphi(x_0 + h + \xi) = 0,$$

即

$$\varphi(x_0 + h + \xi) = 0.$$

从而

$$x_0 + h + \xi \in \mathfrak{M}.$$

对此点令点 $x_0 + h \in T_0$ 与之对应，不等式(6)指出

$$\|\xi\| = o(\|h\|),$$

即是说，点 $x_0 + h \in T_0$ 与其对应点 $x_0 + h + \xi \in \mathfrak{M}$ 之间的距离 $\|\xi\|$ 与它到切点的距离 $\|h\|$ 相比较是高阶无穷小量.

今设 $x = x_0 + u$ 属于 $\mathfrak{M}$，即

$$\varphi(x_0 + u) = \varphi(x_0) = 0.$$

我们有

$$\varphi(x_0 + u) - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0)u + \varepsilon(u) = 0,$$

式中 $\varepsilon(u) = o(\|u\|)$. 由此

$$\varphi'(x_0)u = -\varepsilon(u).$$

T 代表空间 E_x/T_0 的元而它含有 u. 于是

$$\varphi'(x_0)u = AT.$$

由此

$$AT = -\varepsilon(u), \text{ 且 } T = -A^{-1}\varepsilon(u),$$

$$\|T\| \leqslant \|A^{-1}\|\|\varepsilon(u)\|.$$

在空间 E_x 的属于 T 的元中有元 ξ 使

$$\|\xi\| \leqslant 2\|T\| \leqslant 2\|A^{-1}\|\|\varepsilon(u)\|.$$

因为 $\xi \in T$，$u \in T$，所以

$$u - \xi \in T_0, \quad x_0 + u - \xi \in T_{x_0}.$$

对此点使点 $x = x_0 + u$ 与之对应． 对这些点间的距离 $\|\xi\|$ 成立估值式

$$\|\xi\| = o(\|u\|).$$

定理证完．

局部线性空间 与切相流形这一概念相联系的是局部线性空间，它对某些问题的研究是重要的．

我们考虑两个距离空间 X 和 Y．设给定一个拓扑的，即一对一的两方连续的由 X 到 Y 上的映象．而且设 X 的元 x 的象为 Y 内的象 $\varphi(x)$． 映象 φ 称为在 X 的点 x_0 殆等距的，如果 X 内任两元 x_1, x_2 的距离和它们在 Y 内的象的距离由下述不等式联系．

$$\rho(x_1, x_2)\ (1 - \varepsilon) \leqslant \rho(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \leqslant \rho(x_1, x_2)(1 + \varepsilon),$$

式中 ε 随 $\rho(x_1, x_0) + \rho(x_2, x_0)$ 趋于零而趋近于零．

例 设 $\mathfrak{M}$ 为 E_x 内流形由方程 $\phi(x) = 0$ 给定，T_{x_0} 为 $\mathfrak{M}$ 在正常点 $x_0 \in \mathfrak{M}$ 的线性切向流形．设

$$E_x = T_0 \oplus T_\xi,$$

其中 T_0 是元 h 的全体，对于它 $\phi'(x)h = 0$．对某一 $r > 0$，对 T_{x_0} 的每一元

$$x_0 + h, \quad \|h\| \leqslant r,$$

含 $\mathfrak{M}$ 的元

$$x_0 + h + \xi(h)$$

与之对应（见本节定理 1）． 我们得出一个拓扑映象 χ 映点 x_0 在 T_{x_0} 内邻域于点 x_0 在 $\mathfrak{M}$ 内邻域．

映象 χ 在点 $x_0 \in T_0$（或 $x_0 \in \mathfrak{M}$）是殆等距的．事实上，设 $x_1, x_2 \in T_{x_0}$，$x_i = x_0 + h_i$，$\|h_i\| \leqslant r$．于是对 x_1 对应

$$\chi(x_1) = x_0 + h_1 + \xi(h_1) \in \mathfrak{M},$$

对 x_2 对应

$$\chi(x_2)=x_0+h_2+\xi(h_2)\in\mathfrak{M}.$$

$$\chi(x_1)-\chi(x_2)=h_1-h_2+[\xi(h_1)-\xi(h_2)].$$

我们有

由此 $$\|h_1-h_2\|-\|\xi(h_1)-\xi(h_2)\|\leqslant\|\chi(x_1)-\chi(x_2)\|$$
$$\leqslant\|h_1-h_2\|+\|\xi(h_1)-\xi(h_2)\|.\quad(7)$$

函数 $\xi(h)$ 有连续导数 $\xi'(h)$ 而且 $\xi'(0)=0$. 因此对 $\|h\|\leqslant r$, $\|\xi'(h)\|<\varepsilon$. 此外

$$\|\xi(h_1)-\xi(h_2)\|=\left\|\int_0^1\xi'(h_2+t(h_1-h_2))\,dt(h_1-h_2)\right\|$$
$$\leqslant\int_0^1\|\xi'(h_2+t(h_1-h_2))\|\,dt\,\|h_1-h_2\|.$$

如果

$$\|h_1\|+\|h_2\|\leqslant r$$

那么 $$\|h_1\|\leqslant r,\ \|h_2\|\leqslant r,$$

从而对 $0\leqslant t\leqslant 1$

且 $$\|h_2+t(h_1-h_2)\|\leqslant r$$

$$\|\xi(h_1)-\xi(h_2)\|\leqslant\varepsilon\|h_1-h_2\|.$$

因此不等式 (7) 可以写成

$$\|x_1-x_2\|(1-\varepsilon)\leqslant\|\chi(x_1)-\chi(x_2)\|$$
$$\leqslant\|x_1-x_2\|(1+\varepsilon).$$

这就证明了我们的映象是殆等距的.

现在我们来给出局部线性空间的定义.

设给定距离空间 X，如果对任一点 $x\in X$ 每一充分小邻域总容许殆等距映象映此于某一 Banach 空间的零元的邻域上，X 称为**局部线性的**.

上述例子指出在 B 型空间内，每一个所有点均为正常点的流形是局部线性流形.

微分的概念可以推广到给定在局部线性流形的函数上去。在许多经典变分问题中的容许曲线空间是局部线性的，而且在这些空间内所考虑的泛函的变分正是局部线性空间内的函数的微分的例子。

§11 极值问题

我们来讨论上面引入的某些概念对变分问题的应用。

设 $f(x)$ 是给定在空间 E_x 内泛函，点 $x_0\in E_x$ 称这个泛函的极小(极大)点，如果对点 x_0 的某一邻域内的所有点 x 有 $f(x)\geqslant f(x_0)$ (或 $f(x)\leqslant f(x_0)$)。极小点或极大点统称极点。

定理 1 如果 x_0 是泛函 $f(x)$ 的极点，而此泛函又在此点可微分，

$$df(x_0,h)=f'(x_0)h,$$

那么 $f'(x_0)=0$，即

$$df(x_0,h)=0\quad \text{对任一}\ h\in E_x.$$

事实上，

$$f'(x_0)h=\frac{d}{dt}f(x_0+th)\Big|_{t=0}$$

但 $f(x_0+th)$ 是变量 t 的数值函数，且在 $t=0$ 到达极值。因此

$$df(x_0,h)=f'(x_0)h=\frac{d}{dt}f(x_0+th)\big|_{t=0}=0.$$

因为 h 为 E_x 内任一元。所以定理得证。

现在我们来考虑求条件极值的问题，设 $\varphi(x)$ 为给定在 E_x 且具有值于 E_y 内的函数，$x\in E_x$，$\varphi(x)\in E_y$，且设 $f(x)$ 是定义于 E_x 内泛函。

使 $\varphi(x_0)=0$ 的点 x_0 称泛函 $f(x)$ 对条件 $\varphi(x)=0$ 的条件极小(条件极大)点，如果

$$f(x)\geqslant f(x_0)$$

对满足条件 $\varphi(x)=0$ 的点 x_0 的某一邻域的所有 x 成立.

定理 2 设泛函 $f(x)$ 对条件 $\varphi(x)=0$ 的条件极小点 x_0 是流形 $\varphi(x)=0$ 的正常点，那么存在这样线性泛函 l 定义在空间 E_y，$l\in E_y^*$ 使得对泛函

$$F(x)=f(x)-l\varphi(x)$$

有 $F'(x_0)=0$，即 $dF(x_0, h)=0$ 对 E_x 内任意 h 成立.

首先证明，$df(x_0, h)=0$ 对定义在 x_0 点的线性切向流形所有 h 成立，即对所有 $h\in T_0$. 事实上，设

$$h\in T_0 \text{ 且 } df(x_0,h)=c\neq 0.$$

对任意 t，由前节定理 2 点 x_0+th 对应点

$$x_0+th+u(t),$$

此点属于流形 $\varphi(x)=0$ 且 $\|u(t)\|$ 与 t 比较是高阶无穷小量. 依微分的定义我们有

$$\begin{aligned}
f(x_0+th+u(t)) &= f(x_0)+df(x_0,th+u(t))+w(t)\\
&= f(x_0)+f'(x_0)th+f'(x_0)u(t)+w(t)\\
&= f(x_0)+ct+f'(x_0)u(t)+w(t).
\end{aligned}$$

当 $t\to 0$ 时，$f'(x_0)u(t)+w(t)$ 与 ct 比较是高阶无穷小量，因此差

$$f(x_0+th+u(t))-f(x_0)$$

的符号与 ct 的符号一致，所以随着 t 的符号的变化也变号. 但这时 x_0 不可能是泛函的极值. 从而 $c\neq 0$ 的假设不成立.

由此可知在定理的条件下

$$df(x_0,h)=0$$

对使 $\varphi'(x_0)h=0$，即

$$d\varphi(x_0,h)=0$$

的所有 h. 由此可知

$$df(x_0,h_1)=df(x_0,h_2)$$

如果 h_1 和 h_2 属于同一剩余类 $T\in E_x/T_0$. 引入泛函

$$\chi(T)=df(x_0,h)$$

式中 h 为 T 任一元. 我们有

$$|\chi(T)|=|df(x_0,h)|=|f'(x_0)h|\leqslant\|f'(x_0)\|\|h\|.$$

由此取右边关于 h 的下确界可得

$$|\chi(T)|\leqslant\|f'(x_0)\|\|T\|.$$

即 $\chi(T)$ 是定义于 E_x/T_0 的线性泛函. 在另一方面,

$$T=[\varphi'(x_0)]^{-1}y,$$

式中 y 为 E_y 的元使 $\varphi'(x_0)h=y$ 对任意 $h\in T$ (见第十节). 由此

$$df(x,h)=\chi(T)=\chi\{[\varphi'(x_0)^{-1}y]\}=l(y).$$

因为 $y=\varphi'(x_0)h=d\varphi(x_0,h)$, 所以我们得

$$df(x,h)=ld\varphi(x_0,h).$$

由此令

$$F(x)=f(x)-l\varphi(x),$$

则有

$$dF(x_0,h)=0$$

对所有 $h\in E_x$. 这就是所要证明的.

例. 等周问题. 我们来求泛函 $f(x)$ 在条件 $\varphi_i(x)=0$, $i=1,2,\cdots,n$ 之下的极值,其中 $f(x)$、$\varphi_i(x)$ 为定义在 E 上泛函. 视 φ_i 为 n 维矢量 $\bar{\varphi}$ 的分量,并用 $\bar{\varphi}(x)$代表以 $\varphi_i(x)$, $i=1,2,\cdots,n$ 为分量的矢量. 设极值在点 x_0 到达. 由定理 2, 存在线性泛函 $l(\varphi)$ 使对 $F(x)=f(x)-l\bar{\varphi}(x)$, 有 $dF(x_0,h)=0$. 但在 n 维空间

$$l\bar{\varphi}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\varphi_i,$$

式中 λ_i 为常数．由此

$$F(x)=f(x)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\varphi_i(x).$$

从而在极值点 x_0，

$$f'(x_0)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\varphi_i'(x_0)=0.$$

这就得出 Lagrange 乘子规则．

附　　录

I. 函数空间 $L_p, p>1$

定义在 $[0,1]$ 依 Lebesgue 意义可测的函数 $x(t)$ 称属于 $L_p(0,1)$ 或者说 p 幂可和函数，如果

$$\int_0^1 |x(t)|^p dt < \infty,$$

积分理解为 Lebesgue 积分，p 为一实数大于零.

以后我们规定 $p \geqslant 1$. 若 $p=1$，则得出可和函数类，用 $L(0,1)$ 代表.

我们证明，如果 $x(t) \in L_p(0,1)$ 且 $y(t) \in L_p(0,1)$，那么 $x(t)+y(t) \in L_p(0,1)$.

取两数 a 和 b. 于是

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|.$$

我们讨论两个情形:

1) $|a| > |b|$，于是

$$|a+b| \leqslant 2|a|$$

且
$$|a+b|^p \leqslant 2^p|a|^p \leqslant 2^p(|a|^p + |b|^p),$$

2) $|b| \geqslant |a|$. 于是

$$|a+b|^p \leqslant 2^p|b|^p \leqslant 2^p(|a|^p + |b|^p).$$

因此永远有

$$|a+b|^p \leqslant 2^p(|a|^p + |b|^p).$$

今令 $a = x(t)$，$b = y(t)$，可得

$$|x(t)+y(t)|^p \leqslant 2^p(|x(t)|^p + |y(t)|^p).$$

因为

$$\int_0^1 |x(t)|^p dt < \infty, \quad \int_0^1 |y(t)|^p dt < \infty$$

所以

$$\int_0^1 |x(t) + y(t)|^p dt < \infty.$$

这就是所要证明的.

设给定满足条件

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty$$

的数列 $x = \{\xi_i\}$ 的集. 我们用 l_p 代表这个集. 完全同于上述的情形可证: 若 $x \in l_p$, $y \in l_p$, 那么

$$x + y \in l_p,$$

即是说,若

$$x = \{\xi_i\}, y = \{\eta_i\}, \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^p < \infty,$$

那么

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i + \eta_i|^p < \infty.$$

Hölder 不等式. 在许多不同的数学问题中广泛应用了 Буняковский-Cauchy 不等式. 现在我们来建立这个不等式的推广,即有名的 Hölder 不等式.

考虑函数 $\tau = t^\alpha$, 其中 $\alpha > 0$. 我们有

$$\tau' = \alpha t^{\alpha-1} > 0 \text{ 对 } t > 0.$$

即是说, 对正数 t, $\tau = t^\alpha$ 为增函数, 因此对这样 t 定义了单值函数 $t = \tau^{\frac{1}{\alpha}}$. 我们来构造函数 $\tau = t^\alpha$ 的图形,取两个实

正数 ξ 和 η，在 t 轴和 τ 轴上取这两个数的对应点，并过这两点引平行于轴的直线.

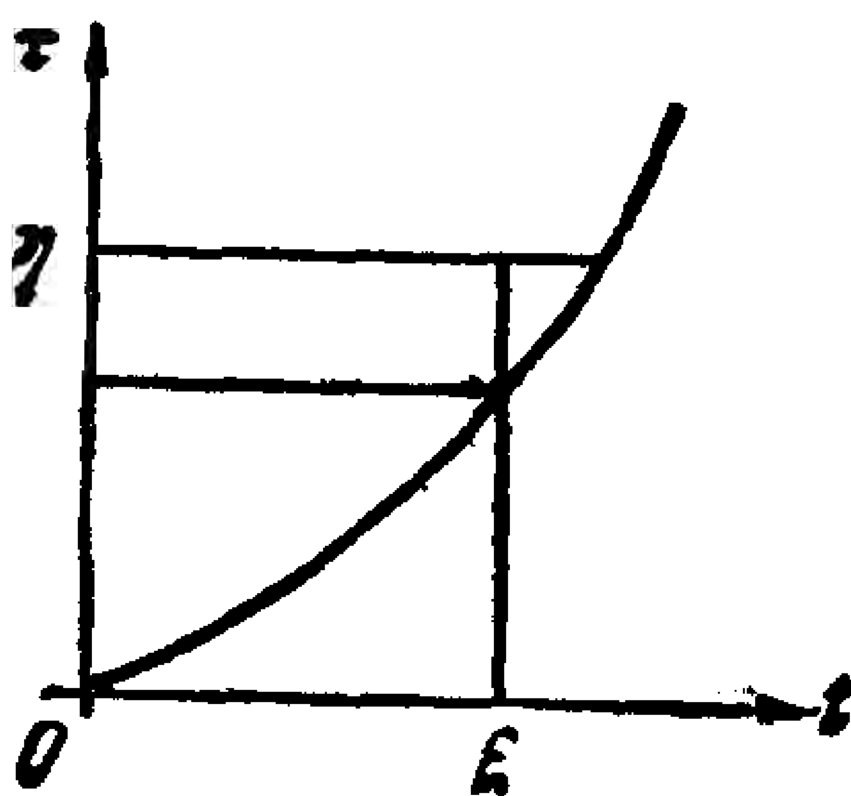


图 6

这样我们得出两个曲边三角形(图 6). 它们的面积依次是

$$S_1=\frac{\xi^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad 和 \quad S_2=\frac{\eta^{\frac{1}{\alpha}+1}}{\frac{1}{\alpha}+1}.$$

在另一方面显然有

$$S_1+S_2\geqslant\xi\eta,$$

而且等式仅当 $\eta=\xi^\alpha$ 时成立. 由此

$$\xi\eta\leqslant\frac{\xi^{\alpha+1}}{\alpha+1}+\frac{\eta^{\frac{1}{\alpha}+1}}{\frac{1}{\alpha}+1}.$$

令 $\alpha+1=p$, $\frac{1}{\alpha}+1=q$. 我们有

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \tag{1}$$

由关系 (1) 联系的两个数称相互共轭的. 显然，$p>1$ 也有 $q>1$. 因此对任意 ξ 和 η 以及一对共轭数 p 和 q 有

$$\xi\eta \leqslant \frac{\xi^p}{p} + \frac{\eta^q}{q}. \tag{2}$$

取两个函数 $x(t)\in L_p(0,1)$ 和 $y(t)\in L_q(0,1)$ 且令

$$\xi = \frac{|x(t)|}{\left(\int_0^1 |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}},\quad \eta = \frac{|y(t)|}{\left(\int_0^1 |y(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}}.$$

代入 (2) 式可得

$$\frac{|x(t)|\,|y(t)|}{\left(\int_0^1 |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |y(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{|x(t)|^p}{p\int_0^1 |x(t)|^p dt} + \frac{|y(t)|^q}{q\int_0^1 |y(t)|^q dt}.$$

此不等右边是可和函数. 这就是说左边也是可和的. 两边积分可得

$$\frac{\int_0^1 |x(t)|\,|y(t)|\,dt}{\left(\int_0^1 |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |y(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

或

$$\int_0^1 |x(t)y(t)|\,dt \leqslant \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |y(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{3}$$

我们得出的这个不等式称为对积分的 Hölder 不等式. 在 $p = q = 2$ 的特殊情形，它还原成 Буняковский-Cauchy 不等式.

今设 $x = \{\xi_i\}$, $y = \{\eta_i\}$ 且 $x\in l_p$, $y\in l_q$. 在不等式(2)中令

$$\xi = \frac{|\xi_i|}{\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}}\qquad \eta = \frac{|\eta_i|}{\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}}.$$

我们得

$$\frac{|\xi_i||\eta_i|}{\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

$$\leqslant \frac{|\xi_i|^p}{p\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p}+\frac{|\eta_i|^q}{q\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^q}.$$

类似于上述关于 i 求和得出对和的 Hölder 不等式

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i\eta_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{4}$$

对 $p=q=2$ 也还原成对和的 Буняковский-Cauchy 不等式.

Minkowski 不等式. 设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 属于 $L_p(0,1)$. 我们证明

$$\left(\int_0^1 |x(t)+y(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_0^1 |y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{5}$$

为了证明此式,先注意,若

$z(t)\in L_p(0,1)$ 那么 $|z(t)|^{p-1}\in L_q(0,1)$.

事实上,

$$(|z(t)|^{p-1})^q=|z(t)|^{(p-1)\frac{p}{p-1}}=|z(t)|^p,$$

由此可知 $(|z(t)|^{p-1})^q$ 为可和函数.

我们来考虑积分

$$\int_0^1 |x(t)+y(t)|^p\,dt.$$

应用两次 Hölder 不等式于函数

$|x(t)+y(t)|^{p-1}\in L_q(0,1)$ 和 $x(t)\in L_p(0,1)$ 或者和 $y(t)\in L_p(0,1)$ 可得

$$\int_0^1 |x(t)+y(t)|^p dt \leqslant \int_0^1 |x(t)+y(t)|^{p-1}|x(t)|\,dt + \int_0^1 |x(t)+y(t)|^{p-1}|y(t)|\,dt$$

$$\leqslant \left(\int_0^1 |x(t)+y(t)|^{(p-1)q}dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^1 |x(t)+y(t)|^{(p-1)q}dt\right)^{\frac{1}{q}} \times \left(\int_0^1 |y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_0^1 |x(t)+y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(\int_0^1 |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^1 |y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\right].$$

两边除以

$$\left(\int_0^1 |x(t)+y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

并注意 $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$，我们得出**对积分的** Minkowski **不等式**.

今设 $x=\{\xi_i\}\in l_p$ 且 $y=\{\eta_i\}\in l_p$. 我们证明

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i+\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{6}$$

完全同于积分的情形可以断定，若 $z=\{\zeta_i\}\in l_p$，那么

$$z'=\{|\zeta_i|^{p-1}\}\in l_q.$$

我们考虑

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i+\eta_i|^p.$$

两次应用不等式于序列

$$\{|\xi_i+\eta_i|^{p-1}\}\in l_q \text{ 和 } \{\xi_i\}\in l_p \text{ 及 } \{\eta_i\}\in l_p$$

可得

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i+\eta_i|^p \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i+\eta_i|^{p-1}|\xi_i|$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i+\eta_i|^{p-1}|\eta_i|$$

$$\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i+\eta_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i+\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}\left[\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right].$$

两边除以

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i+\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

并注意 $$1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$$

则得出对和的 Minkowski 不等式(6).

最后再注意一下,在公式(5)和(6)中等式仅当在[0,1]内殆遍有

$$y(t)=kx(t)\quad k>0$$

或 $$\eta_i=k\xi_i\quad k>0\quad i=1,2,3\cdots$$

时成立.

得出的所有不等式容易推广到多变量函数的情形.

II. $L_p(G)$ 空间内函数的平均连续性

用 $L_p(G)$ 代表定义在平面区域G且p幂可积分的函数 $\varphi(x, y)$ 的全体. $p \geqslant 1$. 在 $L_p(G)$ 内引入范数 $\|\varphi\| = \left(\iint\limits_G |\varphi|^p dxdy\right)^{\frac{1}{p}}$. 空间 $L_p[0, 1]$ 的性质, Hölder 不等式, Minkowski 不等式,完备性等: 立刻可以移到 $L_p(G)$.

我们来证明一个定理,它一般在突变函数方程未加讨论.

定理 任一函数 $\varphi(x,y) \in L_p(G)$ 依平均连续, 即对任一 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 使得当 $\sqrt{h^2 + k^2} < \delta$ 时

$$\left(\iint\limits_G |\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x,y)|^p dxdy\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

这时若点 $(x+h, y+k)$ 在区域G之外时,则令 $\varphi(x+h, y+k) = 0$.

设 H_ρ 为边界带形,即G中距G的边界的距离不超过ρ的点的全体. 再令 $G_\rho = G \backslash H_\rho$.

我们可设ρ充分小致使 $\text{mes}(H_\rho) < \eta$, 式中$\eta$为一予先给定的正数($G$ 的边界我们认为是充分光滑的). 因为在 G_ρ 上函数 $\varphi(x, y) \in L_p(G_\rho)$. 所以依 Лузин 定理存在闭集 $F_\eta^1 \subset G_\rho$ 使在 F_η^1 上函数 $\varphi(x, y)$ 连续且 $\text{mes}(G_\rho \backslash F_\eta^1) < \eta$. 这时显然有 $\text{mes}(G \backslash F_\eta^1) < 2\eta$.

设h和k满足条件 $\sqrt{h^2 + k^2} < \rho$. 对满足这个条件的固定的h和k, 令 F_η^2 代表形如 $(x-h, y-k)$ 的所有点,式中 $(x, y) \in F_\eta^1$. 显然 $F_\eta^2 \subset G$ 且集 F_η^2 是闭的, 这是因为它由闭集 F_η^1 经过平移 $\bar{l} = (-h, -k)$ 而来. 此外由 Lebesgue

测度对平移的不变性，所以 $\operatorname{mes}(F_\eta^2)=\operatorname{mes}(F_\eta^1)$. 由此也有 $\operatorname{mes}(G\backslash F_\eta^2)<2\eta$.

最后令 $F_\eta=F_\eta^1\cap F_\eta^2$. 那么 F_η 为闭集，而且在 F_η 上 $\varphi(x,y)$ 连续从而也一致连续. 此外

$$\operatorname{mes}(G\backslash F_\eta)=\operatorname{mes}((G\backslash F_\eta^1)\cup(G\backslash F_\eta^2))\leqslant\operatorname{mes}(G\backslash F_\eta^1)+\operatorname{mes}(G\backslash F_\eta^2)<4\eta.$$

我们认为 η 充分小使对给定的 $\varepsilon>0$

$$\left(\iint_E|\varphi(x,y)|^p dxdy\right)^{\frac{1}{p}}<\frac{\varepsilon}{4}\tag{1}$$

如果 $E\subset G$ 且 $\operatorname{mes}(E)<4\eta$ 的话.

我们来估计积分

$$\left(\iint_G|\varphi(x+h,y+k)-\varphi(x,y)|^p dxdy\right)^{\frac{1}{p}}.$$

我们有

$$\begin{aligned}&\left(\iint_G|\varphi(x+h,y+k)-\varphi(x,y)|^p dxdy\right)^{\frac{1}{p}}\\ \leqslant&\left(\iint_{F_\eta}|\varphi(x+h,y+k)-\varphi(x,y)|^p dxdy\right)^{\frac{1}{p}}\\ &+\left(\iint_{G\backslash F_\eta}|\varphi(x+h,y+k)|^p dxdy\right)^{\frac{1}{p}}\\ &+\left(\iint_{G\backslash F_\eta}|\varphi(x,y)|^p dxdy\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

由(1)

$$\left(\iint_{G\backslash F_\eta}|\varphi(x+h,y+k)|^p dxdy\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\left(\iint_{G\setminus F_\eta}|\varphi(x,y)|^p dxdy\right)^{\frac{1}{p}}<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2}. \quad (2)$$

我们认为 $\delta<\rho$ 充分小使当 $\sqrt{h^2+k^2}<\delta$ 时

$$|\varphi(x+h,y+k)-\varphi(x,y)|<\frac{\varepsilon}{2[\mathrm{mes}(G)]^{\frac{1}{p}}}.$$

在 F_η 上一致成立. 于是

$$\left(\iint_{F_\eta}|\varphi(x+h,y+k)-\varphi(x,y)|^p dxdy\right)^{\frac{1}{p}}<\frac{\varepsilon}{2} \quad (3)$$

由(2)和(3)可知 $\sqrt{h^2+k^2}<\delta$ 时,

$$\left(\iint_G|\varphi(x+h,y+k)-\varphi(x,y)|^p dxdy\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon.$$

定理证完.

III. Brouwer 定理

我们来证明 L. Brouwer 的有名定理,即映 n 维欧氏空间内闭凸体于其自身的连续映象的不动点的存在定理. 这个定理广泛应用于泛函分析来证明算子方程的解的存在. 因为 n 维欧氏空间内闭凸体相互同胚, 所以只须对映 n 维空间内单纯形于其自身[1]的连续映象来证明 J. Brouwer 定理就够了.

我们考虑 n 维单纯形 s_0, 并用 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 代表它的顶点. 单纯形的任一 k 维边界 $(0\leqslant k\leqslant n)$ 用 $(x_{i_0}, x_{i_1}, \cdots, x_{i_k})$ 代表,其中 $x_{i_m}, m=0,1,\cdots,k$ 代表这个边界的顶点的全体. 设单纯形 s_0 被分割成某些单纯形 s. 对单纯形 s 的每一顶点依下述方式使数 $\varphi(x)$ 与之对应.

1) 有关这里遇到的拓扑概念见[26].

我们考虑基本单纯形 s_0 的含有 x 的最小维数的边界. 设这个边界是 $(x_{i_0}, x_{i_1}, \cdots, x_{i_k})$. 那么令数 $\varphi(x)$ 等于下标 i_0, i_1, $\cdots$, i_k 之一. 例如设 x 与单纯形 s_0 的顶点 x_i 相重合,那么 $\varphi(x)=i$. 如果 x 含于一维边界 (x_i, x_j) 而且与这些顶点之一不相重合,那么令 $\varphi(x)$ 等于数 i 或 j 之一, 余类推. 最后若 x 含于 s_0 内部(不属于 k 维边界, $k=0, 1, \cdots, n-1$ 之一),那么 $\varphi(x)$ 可以等于 $n+1$ 个数 $0, 1, 2, \cdots, n$ 的任一个. 我们称 $\varphi(x)$ 为正规顶点函数.

我们分割的单纯形 s 称为合格的如果它的顶点带有 $n+1$ 个不同的数 $0, 1, 2, \cdots n$.

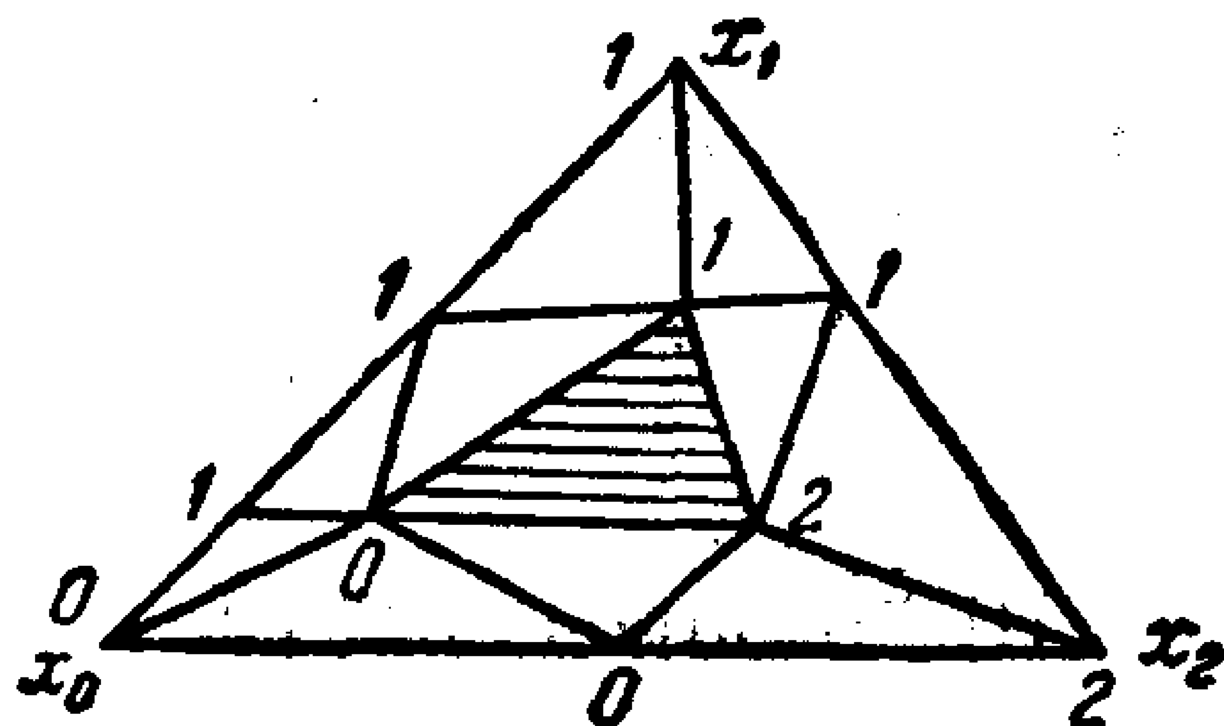


图 7

在图 7 中举一个二维单纯形的分解. 其单纯分解顶点 0, 1, 2. 画线的那个三角形是合格的.

引理 1 (Sperner) 任给单纯形 s_0 的单纯形分割和任给定义在单纯形分割的顶点上的正规顶点函数 $\varphi(x)$, 总存在一个合格单纯形, 而且它的个数是奇数.

我们用归纳法来证明. 对 $n=0$ 的情形, 即单纯形还原为一点时, 定理是平凡的. 设定理对 $n-1$ 单纯形成立, 我们未证明它对 n 单纯形成立.

设给定 n 单纯形 s_0 的单纯形分割. 并设在分割的单纯形 s 的顶点 x 定义顶点正规函数 $\varphi(x)$. 我们称 $(n-1)$ 合格边界是指分割的单纯形的 $(n-1)$ 边界, 在具有 n 个顶点函数

$\varphi(x)$ 取值 $0, 1, \cdots n-1$. 在分割中单纯形 s 的 $(n-1)$ 合格边界的数目用 $\alpha(s)$ 代表。

可能有三个情形.

1. 函数 $\varphi(x)$ 在单纯形 s_1 的顶点取所有 $n+1$ 个值 $0, 1, 2, \cdots n$, 即 s_1 是合格单纯形而且它含唯一合格 $(n-1)$ 边界,即与之相对的顶点 x 对于它 $\varphi(x)=n$. 由此 $\alpha(s_1)=1$ 且

$$\sum\alpha(s_1)=\rho_n, \tag{1}$$

式中 ρ_n 是合格 n 单纯形数,左边的和是关于所有合格单纯形而取的.

2. 函数 $\varphi(x)$ 在不合格的单纯形 s_2 的顶点取 n 个值 $0, 1, 2, \cdots, n-1$. 这些值之一必须取两次. 从而 s_2 有两个合格 $(n-1)$ 边界, $\alpha(s_2)=2$.

3. 函数在单纯形 s_3 的顶点漏掉了值 $0, 1, 2, \cdots, n-1$ 之一,从而 $\alpha(s_3)=0$.

由此

$$\sum\alpha(s)\equiv\sum\alpha(s_1) \pmod 2. \tag{2}$$

和的左端是关于分割的所有 n 单纯形而取的,而右端则是依这个分割的合格 n 单纯形 s_1 而取的.

我们再举 $(n-1)$ 合格边界的另一计算,有两种可能.

1. 合格边界落在基本单纯形 s_0 的内部的,它是分割的两个单纯形的公共边界,而且在和 $\sum\alpha(s)$ 中我们把它计算了两次.

2. 合格边界落在 s_0 的边界,由这样边界和函数 $\varphi(x)$ 的定义可知,它仅能在基本单纯形的 $(n-1)$ 边界 $(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})$ 上找到. 我们用 ρ_{n-1} 代表落在 $(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})$ 上 $(n-1)$ 合格边界数.

我们有

$$\sum \alpha(s) \equiv \rho_{n-1} \pmod 2. \tag{3}$$

由(1),(2),(3)可得

$$\rho_n \equiv \rho_{n-1} \pmod 2.$$

但对 $(n-1)$ 单纯形我们认为引理已证明，即 ρ_{n-1} 为奇数，从而 ρ_n 是奇数因而异于零.

引理完全证毕.

引理 2 设单纯形 s_0 由 $n+1$ 个闭集 $F_0, F_1, \cdots, F_n$ 覆盖使得它的每一 k 边界 $(x_{i_0}, x_{i_1}, \cdots, x_{i_k})$ 由集 $F_{i_0}, F_{i_1}, \cdots, F_{i_k}$ 覆盖. 在此条件下在 s_0 内存在点属于所有 $n+1$ 个集 F_i, $i=0,1,\cdots n$.

分割 s_0 为单纯形且在分割的单纯形的顶点 x 定义如下函数，$\varphi(x)$：我们考虑最小维数的边界 $(x_{i_0}, x_{i_1}, \cdots, x_{i_k})$ 而它含有 x, $0 \leqslant k \leqslant n$. 这个点落在覆盖 $(x_{i_0}, x_{i_1}, \cdots, x_{i_k})$的集 $F_{i_0}, F_{i_1}, \cdots, F_{i_k}$ 之一. 取 $\varphi(x)$ 等于这些集中含 x 的集的下标(或这些下标的任一个，如果此点含于集 F_{i_0}, F_{i_1}, $\cdots$, F_{i_k} 当中的某几个). 显然 $\varphi(x)$ 是正规顶点函数.

由 Sperner 定理在我们的分割的单纯形中必须存在合格单纯形 s_1，在它的顶点 x 上函数 $\varphi(x)$ 取所有 $n+1$ 个值 $0, 1, \cdots, n$，即是说，s_1 的顶点属于 $n+1$ 个不同的集 F_i.

我们将把 s_0 作单纯形分解为愈来愈微小的单纯形. 设 m 次分割所得的单纯形的直径不超过 δ_m，其中当 $m \to \infty$ 时 $\delta_m \to 0$. 我们讨论第一，第二，$\cdots$，第 m 分割$\cdots$所得的合格单纯形序列 $s_1, s_2, \cdots, s_m, \cdots$. 由 s_0 的紧性，单纯形 $\{s_m\}$ 的顶点的集有聚点 x^*. 任取 $\delta > 0$，考虑满足不等式 $\delta_m < \frac{\delta}{2}$ 的那些单纯形 s_m. 在以 x^* 为中心 $\frac{\delta}{2}$ 为半径的球内有单纯形 s_m 之一的至少一个顶点，从而这样单纯形的所有 $n+1$ 个顶点落在以x^*为中心 δ 为半径的球内. 因为 s_m 的顶点属于

$n+1$ 个不同的集 $F_0, F_1, \cdots, F_n$，所以在 x^* 的任一 δ 邻域内含有所有集 F_i，$i=0,1,\cdots,n$ 的点。从而 x^* 是每一 F_i 的聚点。但 F_i 又是闭的，所以 x^* 属于所有 F_i，$i=0,1,\cdots,n$。

Brouwer **定理** 对映 n 维单纯形 s 于其自身内的连续映象 $f(x)$，存在这个映象的不动点，即存在 $x^* \in s$ 使

$$f(x^*) = x^*.$$

在 s 上引入重心坐标

$$\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_n, \sum_{i=0}^{n} \mu_i = 1.$$

对 s 的点所有 $\mu_i \geqslant 0$。设点 $x(\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_n) \in s$ 由映象 f 变成点 $y(\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_n) \in s$，$y = f(x)$。我们仍有 $\sum_{i=0}^{n} \nu_i = 1$，$\nu_i \geqslant 0$，$i = 0, 1, \cdots n$。设点 $x(\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_n)$ 含于边界 $(x_{i_0}, x_{i_1}, \cdots, x_{i_k})$，$0 \leqslant k \leqslant n$。点 x 的坐标 μ_i 对 $i \neq i_0, i_1, \cdots, i_k$ 为零。

因为

$$1 = \mu_{i_0} + \mu_{i_1} + \cdots + \mu_{i_k} = \sum_{i=0}^{n} \nu_i \geqslant \nu_{i_0} + \nu_{i_1} + \cdots + \nu_{i_k},$$

所以不可能同时满足不等式

$$\mu_{i_0} < \nu_{i_0}, \mu_{i_1} < \nu_{i_1}, \cdots, \mu_{i_k} < \nu_{i_k},$$

所以至少对这些坐标的一个将有

$$\mu_{i_r} \geqslant \nu_{i_r}.$$

因此，如果用 F_i 代表这样的点集，在其内坐标 μ_i 对映象 f 之后不增加，那么边界 $(x_{i_0}, x_{i_1}, \cdots, x_{i_k})$ 的每一点 x 由集 $F_{i_0}, F_{i_1}, \cdots, F_{i_k}$ 之一覆盖。

集 F_i 满足前述引理所有的条件[1]. 因此在 s 上存在点 $x^*(\mu_0^*, \mu_1^*, \cdots, \mu_n^*)$ 属于所有的集. 没有一点 μ_i^* 对变换 f 会增大的. 如果 $f(x^*) = y^*(\nu_0^*, \nu_1^*, \cdots, \nu_n^*)$, 所以

$$\mu_i^* \geqslant \nu_i^* \qquad i = 0, 1, \cdots, n \tag{4}$$

由 (4) 和重心坐标的性质知

$$1 = \sum_{i=0}^{n} \mu_i^* \geqslant \sum_{i=0}^{n} \nu_i^* = 1 \tag{5}$$

由(4)和(5)可得

$$\mu_i^* = \nu_i^*, \quad i = 0, 1, \cdots, n.$$

即 $f(x^*) = x^*$. 这就证明 x^* 是不动点, Brouwer 定理证完[*].

推论 对映 n 维 Banach 空间 E 内有界闭凸体 s 于其自身的连续映象存在不动点.

令 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 代表 E 的基. 对元

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n$$

令点

$$\tilde{x} = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\} \in E_n$$

与之对应, E_n 为 n 维欧氏空间. 这个对应 φ 是等距的且同构的, 并映闭凸集 $s \subset E$ 于闭凸集 $\tilde{s} \subset E_n$. 设 f 是映 s 于其自身的连续映象. 那么 $\tilde{f} = \varphi f \varphi^{-1}$ 是连续映 $\tilde{s}$ 于其自身的映象, 依 Brouwer 定理, 此映象的不动点 $\tilde{x}^*$ 存在

$$\varphi f \varphi^{-1}(\tilde{x}^*) = \tilde{x}^*,$$

但

$$f\varphi^{-1}(\tilde{x}^*) = \varphi^{-1}(\tilde{x}^*),$$

所以 $x^* = \varphi^{-1}(\tilde{x}^*)$ 是映象 f 的不动点.

---

1) F_i 的闭性由 f 的连续性得出.

*) 不用代数拓扑的概念对 Brouwer 的不动点定理的证明见[10]. ——译者注

IV. 实变函数 n 阶导数的两个定义

存在点 t 的数值函数 $x(t)$ 的两个 n 阶导数的定义.

1. 引入记号

$$\delta^n_{\Delta t}x(t) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k x\left(t + \left(k - \frac{n}{2}\right)\Delta t\right),$$

并称 $\delta^n_{\Delta t}x(t)$ 为函数 $x(t)$ 在点 t 的 n 阶中心差. 于是我们令

$$x^{(n)}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{(\Delta t)^n}\delta^n_{\Delta t}x(t),$$

如果这个极限存在的话.

如果中心差在 $a \leqslant t \leqslant b$ 内一致趋于 $x^{(n)}(t)$,那么 $x^{(n)}(t)$ 称一致 n 阶差导数.

2. 继续定义 n 次累次可微函数 $x(t)$ 的 n 阶导数, 并用 $x^{(n)}(t)_0$ 代表它. 自然假设前面的导数 $x'(t)_0$, $x''(t)_0$, $\cdots$, $x^{(n-1)}(t)_0$ 在 t 点某一邻域存在.

设 $x^{(n)}(t)_0$ 定义于区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 且连续. 那么存在 $x^{(n)}(t)$ 且

$$x^{(n)}(t) = x^{(n)}(t)_0.$$

事实上,不难看出

$$\frac{1}{(\Delta t)^n}\delta^n_{\Delta t}x(t) = x^{(n)}(t + \theta\Delta t)_0$$

$$-\frac{n}{2} < \theta < \frac{n}{2}.$$

因为 $\Delta t \to 0$ 时,右端一致趋近于 $x^{(n)}(t)_0$, 所以

$$x^{(n)}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{(\Delta t)^n}\delta^n_{\Delta t}x(t) = x^{(n)}(t)_0.$$

可以证明上述命题的反理．由在某一区间存在连续的一致差导数 $x^{(n)}(t)$ 可知在此区间上存在与之相等的累次导数 $x^{(n)}(t)_0$：

$$x^{(n)}(t)_0 = x^{(n)}(t).$$

我们就 $n = 2$ 的情形来证明．设函数 $x(t)$ 在区间 $[0,1]$ 上有连续二阶一致差导数 $x''(t)$．我们用 $y(t)$ 代表积分

$$y(t) = \int_0^t \int_0^{\tau_1} x''(\tau) d\tau d\tau_1.$$

二阶累次导数 $y''(t)_0$ 等于被积式 $x''(t)$，而且又因为 $y''(t)_0 = x''(t)$ 连续，所以它与二阶差导数重合，

$$y''(t)_0 = y''(t).$$

因此

$$[y(t) - x(t)]'' = 0.$$

我们来证明差 $\alpha(t) = y(t) - x(t)$ 仅能是一个线性函数：

$$x(t) = y(t) + a + bt.$$

因为函数

$$y(t) + a + bt$$

有二阶累次导数

$$y''(t)_0 = x''(t)_0,$$

所以我们得

$$x''(t)_0 = x''(t).$$

因此设在区间 $[0,1]$ 上有恒等式 $\alpha''(t) = 0$．令

$$\alpha_1(t) = \alpha(t) - \{\alpha(0) + [\alpha(1) - \alpha(0)]t\}.$$

我们有

$$\alpha_1(0) = \alpha_1(1) = 0 \quad 且 \quad \alpha_1''(t) \equiv 0.$$

令 ε 是任意正数．考虑函数

$$\beta(t) = \alpha_1(t) + \varepsilon t^2.$$

因为 $(\varepsilon t^2)'' = 2\varepsilon > 0$，所以 $\beta''(t) = 2\varepsilon > 0$． 对 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 我们有 $\beta(t) \leqslant \varepsilon$． 事实上，如果对某一 $t \in [0, 1]$ 有

$\beta(t) > \varepsilon$，那么 $\beta(t)$ 的极大值将大于 ε，而且因为 $\beta(0)=0$，$\beta(1)=\varepsilon$，所以这个极大值将在闭区间[0,1]的内点 t_0 达到。在极大点 t_0 二阶中心差

$$\Delta^2_{\Delta t}\beta(t_0) = \beta(t_0+\Delta t) - 2\beta(t_0) + \beta(t_0-\Delta t) \leqslant 0,$$

这是因为
$$\beta(t_0) \geqslant \beta(t_0 \pm \Delta t).$$

由此

$$\beta''(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{(\Delta t)^2}\Delta^2_{\Delta t}\beta(t_0) \leqslant 0,$$

而我们就得出与假设 $\beta''(t_0) > \varepsilon > 0$ 相冲突之处，所以

$$\beta(t) \leqslant \varepsilon \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

但对 $0 \leqslant t \leqslant 1$，

$$\alpha_1(t) = \beta(t) - \varepsilon t^2 \leqslant \beta(t) \leqslant \varepsilon.$$

与此类似，可证不等式

$$\alpha_1(t) \geqslant -\varepsilon.$$

因此对任意 $\varepsilon > 0$ 我们有

$$-\varepsilon \leqslant \alpha_1(t) \leqslant \varepsilon,$$

由此
$$\alpha_1(t) \equiv 0,$$

这就是说
$$\alpha(t) = \alpha(0) + [\alpha(1) - \alpha(0)]t = a + bt,$$

从而得出所要证明的。

在结束之前，我们注意一下，对 n 个实变数的函数 $x(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 有等式

$$\Delta^n_{t_1,t_2,\cdots,t_n,\Delta t}x(t_1,t_2,\cdots,t_n)$$
$$= (\Delta t)^n\left\{\frac{\partial}{\partial t_{k_1}}\left[\cdots\frac{\partial}{\partial t_{k_n}}x(t_1+\theta_1\Delta t, \cdots, t_n + \theta_n\Delta t)\cdots\right]\right\}. \quad (1)$$

式中

$$\Delta^n_{t_1,t_2,\cdots,t_n,\Delta t}x(t_1,\cdots,t_n)$$

$$= \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_k} (-1)^{n-k} x(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n),$$

$\tau_i = t_i + \Delta t$，对 $i = i_1, i_2, \cdots, i_k$ 且 $\tau_i = t_i$ 对其余的 i，而且和是关于集 $(1, 2, \cdots n)$ 的所有子集 $(i_1, i_2, \cdots, i_k)$，$0 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_k \leqslant n$ 而取的。在此 θ_i 是 0 和 1 之间的数。

可用归纳法来证明这个等式．对 $n = 1$ 它还原为有限增量定理．设它对 $(n-1)$ 阶混合差成立．我们有

$$\begin{aligned}
&\Delta^n_{t_1, t_2, \cdots, t_n, \Delta t} x(t_1, t_2, \cdots, t_n) \\
&= \Delta^{n-1}_{t_1, \cdots, t_{k_1-1}, t_{k_1+1}, \cdots, t_n; \Delta t}\, x(t_1, \cdots, t_{k_1} + \Delta t, \cdots, t_n) \\
&\quad - \Delta^{n-1}_{t_1, \cdots, t_{k_1-1}, t_{k_1+1}, \cdots, t_n, \Delta t}\, x(t_1, \cdots, t_{k_1}, \cdots, t_n) \\
&= \Delta t \frac{\partial}{\partial t_{k_1}} [\Delta^{n-1}_{t_1, \cdots, t_{k_1-1}, t_{k_1+1}, \cdots, t_n; \Delta t}\, x(t_1, \cdots t_{k_1} \\
&\quad + \theta_{k_1} \Delta t, \cdots, t_n)]
\end{aligned} \tag{2}$$

（后一等式由应用有限增量而得.）但由归纳法假设

$$\begin{aligned}
&\Delta^{n-1}_{t_1, \cdots, t_{k_1-1}, t_{k_1+1}, \cdots, t_n; \Delta t} x(t_1, \cdots, t_k + \theta_{h_1} \Delta t, \cdots, t_n) \\
&= \frac{\partial}{\partial t_{k_2}} \left\{ \cdots \frac{\partial}{\partial t_{k_n}} x(t_1 + \theta_1 \Delta t, \cdots, t_n + \theta_n \Delta t) \cdots \right\} \\
&\quad \times (\Delta t)^{n-1}.
\end{aligned}$$

由此由 (2) 得 (1)。

文 献

[1] Александров П.С., Введение в общую теорию множеств и функций, Гостехиздат, 1948 (中译本: П. С. 亚力山大罗夫，集与函数的泛论初阶，商务印书馆，1954).

[2] Ахиезер Н.И., Лекции по теории аппроксимаций, Наука, 1965 (中译本: Н. И. 阿赫叶惹尔，逼近论讲义；科学出版社，1957).

[3] Ахиезер Н. И. и Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, Гостехиздат, 1950.

[4] Банах С., Курс функціонального аналізу, Киев, 1948 (乌克兰文) (原书法文本: Banach S., Théorie des opérations linéaires. Monografje Matematyczne, Warsaw, 1932).

[5] Биркгоф Г., Теория Структур, ИЛ, 1952 (原书英文本: Birkhoff G., Lattice theory. Amer. Math. Soc. Coll. Publ 25, New York. 1940).

[5a] Виленкин Н.Я.и. др., Функциональный анализ (серия: «Справочная матгематическая библиотека», наука, 1964).

[6] Вулих Б. З., Введение в функциональный анализ, Физматгиз, 1958.

[7] Гельфанд И.М., Райков Д., Шилов Г. Е., Коммутативные нормированные кольца, физматгиз, 1959 (有英译本: Gelfand I., Raikov, D., and Shilov G., Commutative normed rings, chelsea, New York 1964).

[8] Гильберт Г. (Hilbert D.), Grundzüge einer allgemeinen Theorie, der linearen Integralgleichungen. Chelsea New York, 1952.

[9] Гильберт Д. и Курант Р., Методы матемтической фузики, ГТТИ, 1951 (中译本分 I, II 两卷: R. 柯朗，D 希尔伯特，数学物理方法，科学出版社，I, 1981; II, 1977).

[10] Данфорд Н. и. Шварц Дж. Т., Линейные операторы, общая теория ИЛ, 1962 (原书英文本: Dunford N. and. Schwarz J. T. Linear operotors, part I: General Theory, Inetrscience Publishers Inc., New York, 1958).

[11] Диктин В. А., Операционное исчисление, УМН, Т.Д, Вып. 6 (22) 1947.

[11a] Диктин В. А. и Прудников А. П., Интегральные преобразования и операционное исчисление (серия: «справочная метематическая библиотеиа»), Физматгиз, 1961).

[12] Канторович Л. В. и Акилов Г. П., Функци анальный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, 1959.
[13] Канторович Л. В., Функциональный анализ и прикладная математика УМН, т. ш,вып. 6(28), 1948.
[14] Колмогоров А. Н. и Фомин С. В., Элементые теории функций и функциональ -ного айализа, Изд. МГУ, вып. 1, 1954 вып. 2, 1960 (中译本: A. H. 柯莫果洛夫, C. B. 佛明,函数论与泛函分析初步,高等教育出版社, 1960).
[15] Колмогоров А. Н., Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen linearen Raumes, studia Math., 5 (1934).
[16] Красносельский М.А., Топологические Методы в теории нелинейных интегральных уравнений, ГТТИ, 1956.
[17] Крейн М. Г. и Крейн С. Г., Sur l'espace des fonctions continues sur un bicompact de Housdorff et ses souse-spaces semi-ordonnés, Матем. сб., 13(55) 1943.
[18] Крейн М.Г. и Рутман М,А., Линейные операторы, оставляющие инвариангным конус в банаховом пространстве, У МН, т. Ш, вып. 1 (23) 1948.
[19] Лалло-Данилевский И.А., Теория функций от матриц и системы линейных дифференциальных уравнений, ГТТИ, 1934.
[20] Михлин С.Г., Лекции по линейным интегральным уравнениям, Физметгиз, 1959.
[20a] Наймарк М. А., Линейные дифференциалные операгоры ГТТИ, 1954 (中译本: M. A. 纳依玛克,线性微分算子,科学出版社, 1964).
[21] Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, ГТТИ, 1957 (中译本: И. П. 那汤松,实变函数论, 高等教育出版社, 1959).
[22] Натансон И. П., Конструктивная теория функций, Гостехиздат 1949 (中译本: И. П. 那汤松,函数构造论,科学出版社, 1958).
[23] Немыцкий В. В., Метод неподвижиых точек в анализе, УМН, вып. 1, 1936.
[24] Плеснер А. И., Спектральная теория Линейных операторов, I. УМН, вып IX, 1941.
[25] Плеснер А. И. и Рохлин В. А., Спектральная теория линейных операторов, II, УМН. т. I, вып. 1(11), 1946.
[25a] Плеснер А. И., Спектральная теория линейных операторов, наука 1965.
[26] Понтрягин Л. С., Основы комбинаторной топологии ГТТИ. 1947 (中译本: Л. С. 庞特里雅金,组合拓扑学基础,科学出版社, 1954).
[27] Рисс Ф. и. Секефальви-надь Б., Лекции по функциональному анализу, ИЛ. 1954 (有英译本: Riesz, F. and B. Sz. Nagy, Functional Analysis, Unger, New York, 1955) (中译本分一、二两卷: F. 黎

茨，B. 塞克佛尔维纳吉，泛函分析讲义，科学出版社，1981)。

[28] Рихтмайер Р. Д., Разностные методы решения краевых задач, ИЛ. 1960.

[29] Смирнов В. И., Курс высшей Математики, Т. V, физматгиз, 1959 (中译本: B. И. 斯米尔诺夫，高等数学教程，第5卷，高等教育出版社，1956).

[30] Соболев, С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, ЛГУ, 1950 (中译本: C. Л. 索伯列夫，泛函分析在数学物理中的应用，科学出版社，1959).

[31] Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, ГТТИ, 1948 (原书英文本 E.C. Titchmarsh, Introduction to the theory of Fourier integrals, Oxford Univ. Press, 1937).

[32] Урысон П. С., Труды по топологии и другим областям математики, т.I.ГТТИ, 1951.

[33] Уитеккер Е. и Ватсон Г., Курс современ ного анализа, ч. II, изд. 2—е, физматгиз, 1963 (原书英文本: Whittaker, E. T., and Watson G. N. A course of Modern Analysis, Cambridge Univ. Press, 1927).

[34] Хаусдорф, Ф., Теория множеств, онти, 1937 (Приложение) (中译本: F. 豪斯多夫，集论，科学出版社，1960).

[35] Хилл Е. и. Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, 1962 (中译本: E. 希尔，R. S. 菲利浦斯，泛函分析与半群，上海科学技术出版社，1964).

[36] J. L. Kelly, General Topology, Von Nostrand, 1955 (中译本: J. L. 凯莱，一般拓扑学，科学出版社，1982).

名词索引

五　画

六　画

七　画

八　画

九　画

十　画

十一画

十二画

十 三 画

十 四 画

常用函数空间基本性质*)

	E_n	$C[0,1]$	$\widetilde{M}[0,1]$	m	c	s	$S[0,1]$	$L_p[0,1]$	l_p
元与距离	12	13	17	14	15	18	21	21	22
范数	61	61	62	62				62	62
完备性	25	25	27	25	26			27	27
可分性	46	46			49	48		47	47
泛函一般形式	170	172				172		179	176
自反性	188							188	188

*) 原书的表中错列两个空间，译时略去．——译者注

记号索引*)

*) 第一列二、四两行均为记号 A^*．但代表不同意义，而原书把第二个 A^* 的页数弄错了，已改正．——译者注

[General Information]
□□=□□□□□□□□□□□
□□=□□□Л. А.□□□□□□ В. И.□□□□
□□=508
SS□=10237180
□□□□=1985□08□□1□

7. □□□□□□□□□□□□
8. □□□□□□□□□□□□□□□□□
9. □□□□□□

□□□ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□

1. □□□□□□□□□□□□□□□□□
2. □□□□□Lax□□
3. □□□□□□□
4. □□□□□□□□□□
5. □□□□□□□
6. □□□□□□□
7. □□□□□□□□
8. □□□□□
9. □□□□□□□□
10. □□□□
11. □□□□

□□

Ⅰ. □□□□Lp□p>1
Ⅱ. Lp(G)□□□□□□□□□□□
Ⅲ. Brouwer□□
Ⅳ. □□□□n□□□□□□□□

□□

□□□□

□□□□